解析学 II 問題解説 #5

河野

演習問題 **2.1　長方形領域 R で連続な関数は R で積分可能なことを示せ。

1 変数関数の場合の対応する問題 (演習問題 1.1) も参考にせよ。

平面上の 2 点 $P=(x,y)$，$P'=(x',y')$ の距離 $\|P-P'\|$ を

$$\|P-P'\|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

で定義する。2 変数関数 $f(x,y)$ を $P=(x,y)$ としたとき，$f(P)$ という書き方もする。長方形領域 $R=\left\{P\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, P=(x,y), a\leqq x\leqq b, c\leqq y\leqq d\right\}$ で定義された関数が P で連続であることの定義を ε–δ 論法で書くと

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall P'\in R\ \ \|P-P'\|<\delta\implies|f(P)-f(P')|<\varepsilon$$

である。$f(P)$ 次を満たすとき $f(P)$ は R で一様連続であるという。

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall P,P'\in R\ \ \|P-P'\|<\delta\implies|f(P)-f(P')|<\varepsilon$$

1 変数関数の場合と同様に次が成立する。

長方形領域 R で定義された連続関数が R で一様連続である。

この証明には 1 変数の場合と同様に R のもつ次の性質 (長方形領域のコンパクト性) を用いる。

R の任意の点 P に対し $P\in U_P$ となる開集合 V_P が存在するとする。このとき有限個の点 $P_1,\dots,P_n$ が存在して $R\subseteq V_{P_1}\cup\cdots\cup V_{P_n}$ が成立する。

関数 f が長方形領域 R で連続であるとする。f は連続なので，任意の点 $P\in R$ に対し

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_p>0\ \forall P'\in R\ \ \|P-P'\|<\delta_p\implies|f(P)-f(P')|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。このとき $V(P)=U_{\frac{\delta_P}{2}}(P)$ とおく。このとき有限個の点 $P_1,\dots,P_n$ が存在して

$$R\subseteq V(P_1)\cup\cdots\cup V(P_n)$$

が成立する。

$$\delta=\min\left\{\frac{1}{2}\delta_{P_i}\,\middle|\,i=1,\dots,n\right\}$$

とする。

P,P' を $\|P-P'\|<\delta$ を満たす R の任意の 2 点とする。$R\subseteq V(P_1)\cup\cdots\cup V(P_n)$ よりある点 P_i が存在して $P\in V(P_i)$ となっている。このとき $\|P-P_i\|<\dfrac{1}{2}\delta_{P_i}<\delta_{P_i}$ が成立しているので，

$$|f(P)-f(P_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。

また $\|P-P'\|<\delta\leqq\dfrac{1}{2}\delta_{P_i}$ なので

$$\|P_i-P'\|=\|P_i-P+P-P'\|\leqq\|P_i-P\|+\|P-P'\|<\delta+\frac{1}{2}\delta_{P_i}\leqq\delta_{P_i}$$

が成立する。よって $|f(P_i)-f(P')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ が成立する。これより

$$|f(P)-f(P')|=|f(P)-f(P_i)+f(P_i)-f(P')|\leqq|f(P)-f(P_i)|+|f(P_i)-f(P')|<\varepsilon$$

となり一様連続性が示される。

$R=\left\{P\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,P=(x,y),a\leqq x\leqq b,c\leqq y\leqq d\right\}$ とする。f を R で連続な関数とする。

$$\Delta=\{x_0,x_1,\ldots,x_n;y_0,y_1,\ldots,y_m\}$$

を R の分割とする。即ち $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b, c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$ とする。

$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\quad \Delta y_j=y_j-y_{j-1},\quad \Delta_{ij}=\left\{P\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,P=(x,y).x_{i-1}\leqq x\leqq x_i,y_{j-1}\leqq y\leqq y_j\right\}$

に対し

$$\ell_{ij}=\max\{f(P)\mid P\in\Delta_{ij}\},\qquad m_{ij}=\min\{f(P)\mid P\in\Delta_{ij}\}$$

とおき，

$$s(\Delta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j\qquad S(\Delta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\ell_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$$

とおく。リーマン和

$$\Sigma(\Delta;\{P_{ij}\})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(P_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$$

に対し $s(\Delta)\leqq\Sigma(\Delta;\{P_{ij}\})\leqq S(\Delta)$ が成立する。よって $\|\Delta\|\to 0$ のとき $s(\Delta),S(\Delta)$ が同じ値に近づくならば積分可能であることが示される。以下それを示す。
(a) 2 つの分割 Δ_1,Δ_2 が $\Delta_1\subseteq\Delta_2$ のとき，即ち，分割 Δ_2 が分割 Δ_1 の細分になっているとき，

$$s(\Delta_1)\leqq s(\Delta_2)\leqq S(\Delta_2)\leqq S(\Delta_1)$$

が成立することを 1 変数の場合と同様に示すことができる。
(b) 1 変数の場合と同様に，Δ_1,Δ_2 を R の任意の分割とするとき

$$s(\Delta_1)\leqq S(\Delta_2)$$

が成立する。
(c) (b) より $\sup\{s(\Delta)\mid\Delta\text{は分割}\}$ および $\inf\{s(\Delta)\mid\Delta\text{は分割}\}$ が存在する。このとき

$$a_1=\inf\{s(\Delta)\mid\Delta\text{は分割}\},\qquad a_2=\sup\{s(\Delta)\mid\Delta\text{は分割}\}$$

とおくと $a_1\leqq a_2$ が成立する。
(d) 任意の正数 ε に対しある正数 δ が存在して，任意の分割 Δ に対し

$$\|\Delta\|<\delta\implies 0\leqq S(\Delta)-s(\Delta)<\varepsilon$$

が成立する。

$0 \leqq S(\Delta) - s(\Delta)$ は常に成立している。任意の正数 ε に対し $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$ とおく。一様連続性よりこの ε' に対しある正数 δ' が存在して

$$\forall x, x' \in I \quad \|P - P'\| < \delta' \implies |f(P) - f(P')| < \varepsilon'$$

が成立する。小領域 Δ_{ij} で考える。小領域の最小値，最大値をあたえる点をそれぞれ P_1，P_2 とする。即ち

$$m_i = f(P_1), \qquad \ell_i = f(P_2)$$

とする。このとき $\delta = \dfrac{\delta'}{2}$ とおく。$\|\Delta\| < \delta$ とするとこのとき $P_1, P_2 \in \Delta_{ij}$ より

$$\|P_2 - P_1\| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} \leqq \sqrt{\delta^2 + \delta^2} < \sqrt{2}\,\delta = \frac{\sqrt{2}\,\delta'}{2} < \delta'$$

を満たしているので

$$|f(P_2) - f(P_1)| < \varepsilon'$$

即ち $\ell_{ij} < m_{ij} + \varepsilon'$ が成立する。

$$\begin{aligned}
S(\Delta) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \ell_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \\
&< \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j + \varepsilon' \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \Delta x_i \Delta y_j \\
&= s(\Delta) + \varepsilon' \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sum_{j=1}^{m} \Delta y_j \\
&= s(\Delta) + \varepsilon'(b-a)(d-c) \\
&= s(\Delta) + \varepsilon
\end{aligned}$$

となり，

$$S(\Delta) < s(\Delta) - \varepsilon$$

が得られる。

(e) (d) より $a_1 = a_2$ が成立する。この値を α とする。また (d) より任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して，分割 Δ が $\|\Delta\| < \delta$ を満たしているとき，

$$0 \leqq \alpha - s(\Delta) \leqq S(\Delta) - s(\Delta) < \varepsilon, \qquad 0 \leqq S(\Delta) - \alpha \leqq S(\Delta) - s(\Delta) < \varepsilon$$

が成立する。よって $\|\Delta\| \to 0$ のとき $s(\Delta) \to \alpha, S(\Delta) \to \alpha$ が示される。

演習問題 2.2　次の定積分を定義に基づいて計算せよ。ただし，連続関数の積分可能性は仮定してよい。

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy \qquad$ (ただし $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 2, 0 \leqq y \leqq 2 \right\}$)

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy \qquad$ (ただし $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \leqq x \leqq 2, 0 \leqq y \leqq 3 \right\}$)

(3) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy \qquad$ (ただし $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1 \right\}$)

(1) D の分割として n 等分割 $\Delta_n = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n \ ; \ y_0, y_1, \ldots, y_n \}$ を採用する。即ち $x_i = \dfrac{2i}{n}$, $y_j = \dfrac{2j}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n, \ j = 0, 1, \ldots, n)$ とすると，$\Delta x_i = \dfrac{2}{n}, \Delta y_j = \dfrac{2}{n}$ である。各小領域 $D_{ij} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \right\}$ において $P_{ij} = (x_i, y_j)$ を選び，リーマン和 $\Sigma(\Delta_n; \{ P_{ij} \})$ を考える。

$$\begin{aligned}
\Sigma(\Delta; \{ P_{ij} \}) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{2i}{n} \frac{2j}{n} \frac{2}{n} \frac{2}{n} = 16 \frac{1}{n^4} \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} j \right) \\
&= \frac{16}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = 4 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2
\end{aligned}$$

なので

$$\iint_D xy dx dy = \lim_{n \to \infty} \Sigma(\Delta_n; \{ P_{ij} \}) = 4$$

となる。

(2) D の分割として n 等分割 $\Delta_n = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n \ ; \ y_0, y_1, \ldots, y_n \}$ を採用する。即ち $x_i = 1 + \dfrac{i}{n}$, $y_j = \dfrac{3j}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n, \ j = 0, 1, \ldots, n)$ とすると，$\Delta x_i = \dfrac{1}{n}, \Delta y_j = \dfrac{3}{n}$ である。各小領域 $D_{ij} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \right\}$ において $P_{ij} = (x_i, y_j)$ を選び，リーマン和 $\Sigma(\Delta_n; \{ P_{ij} \})$ を考える。

$$\begin{aligned}
\Sigma(\Delta; \{ P_{ij} \}) &= \sum_{i=1} n \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n} \right) \frac{3j}{n} \frac{1}{n} \frac{3}{n} = \frac{9}{n^4} \left(\sum_{i=1}^{n} n + i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} j \right) \\
&= \frac{9}{n^4} \left(n^2 + \frac{n(n+1)}{2} \right) \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{9}{4} \left(2 + 1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)
\end{aligned}$$

なので

$$\iint_D xy dx dy = \lim_{n \to \infty} \Sigma(\Delta_n; \{ P_{ij} \}) = \frac{27}{4}$$

となる。

(3) D の分割として n 等分割 $\Delta_n = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n \ ; \ y_0, y_1, \ldots, y_n \}$ を採用する。即ち $x_i = \dfrac{i}{n}$, $y_j = \dfrac{j}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n, \ j = 0, 1, \ldots, n)$ とすると，$\Delta x_i = \dfrac{1}{n}, \Delta y_j = \dfrac{1}{n}$ である。各小領域 $D_{ij} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \right\}$ において $P_{ij} = (x_i, y_j)$ を選び，リーマン和

$\Sigma(\Delta_n; \{ P_{ij} \})$ を考える。

$$\begin{aligned}
\Sigma(\Delta; \{ P_{ij} \}) &= \sum_{i=1} n \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{i}{n} \left(\frac{j}{n} \right)^2 \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^5} \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} j^2 \right) \\
&= \frac{1}{n^5} \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{1}{12} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right)
\end{aligned}$$

なので

$$\iint_D xy^2 dxdy = \lim_{n\to\infty} \Sigma(\Delta_n; \{ P_{ij} \}) = \frac{1}{6}$$

となる。

演習問題 2.3　積分領域が長方形の場合に関して定理 2.3 (1)〜(3) を証明せよ。

$D, D_1, D_2, D_1 + D_2$ は長方形領域とする。

(1)　$\Delta = \{ x_0, , \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_m \}$ を D の分割とする。$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ とし，小領域 Δ_{ij} を $\Delta_{ij} = \{ (x, y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \}$ とする。各章領域 Δ_{ij} に対し点 $P_{ij} \in \Delta_{ij}$ を選ぶ。$f, g, f+g$ に関するリーマン和としてそれぞれ

$$\Sigma_{f+g}(\Delta; \{ P_{ij} \}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (f(P_{ij}) + g(P_{ij})) \Delta x_i \Delta y_j$$

$$\Sigma_f(\Delta; \{ P_{ij} \}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

$$\Sigma_g(\Delta; \{ P_{ij} \}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

を選ぶと

$$\Sigma_{f+g}(\Delta; \{ P_{ij} \}) = \Sigma_f(\Delta; \{ P_{ij} \}) + \Sigma_g(\Delta; \{ P_{ij} \})$$

が成立する。ここで $\|\Delta\| \to 0$ とすると

$$\iint_D \{ f(x,y) + g(x,y) \} dxdy = \iint_D f(x,y) dxdy + \iint_D g(x,y) dxdy$$

が得られる。

分割を前と同様に選び，αf のリーマン和を

$$\Sigma_{\alpha f}(\Delta; \{ P_{ij} \}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

とすると，

$$\Sigma_{\alpha f}(\Delta;\{\,P_{ij}\,\}) = \alpha\Sigma_f(\Delta;\{\,P_{ij}\,\})$$

が成立する。ここで $\|\Delta\| \to 0$ とすると

$$\iint_D \alpha f(x,y)dxdy = \alpha\iint_D f(x,y)dxdy$$

が得られる。

(2)　$D_1 = \{\,(x,y) \mid a \leqq x \leqq e, c \leqq y \leqq d\,\}$, $D_2 = \{\,(x,y) \mid e \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d\,\}$ とおくと

$$D_1 + D_2 = \{\,(x,y) \mid a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d\,\}$$

である。Δ を $D_1 + D_2$ の分割とする。ただし，x の分点として e を含んでいるものとする。Δ を D_1 に制限したものは D_1 の分割になる。これを Δ_1 とする。Δ を D_2 に制限したものは D_2 の分割になる。これを Δ_2 とする。このとき

$$\Sigma(\Delta;\{\,P_{ij}\,\}) = \Sigma(\Delta_1;\{\,P_{ij}\,\}) + \Sigma(\Delta_2;\{\,P_{ij}\,\})$$

が成立する。$\|\Delta_i\| \leqq \|\Delta\|$ なので $\|\Delta\| \to 0$ のとき $\|\Delta_1\| \to 0$，$\|\Delta_2\| \to 0$ となるので極限をとると，

$$\iint_{D_1+D_2} f(x)dxdy = \iint_{D_1} f(x)dxdy + \iint_{D_2} f(x)dxdy$$

が得られる。

$D_1 = \{\,(x,y) \mid a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq e\,\}$, $D_2 = \{\,(x,y) \mid a \leqq x \leqq b, e \leqq y \leqq d\,\}$ の場合も同様に証明できる。

(3)　分割 Δ と P_{ij} は前と同様なものとし，

$$\Sigma_f(\Delta;\{\,P_{ij}\,\}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(P_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$$

$$\Sigma_g(\Delta;\{\,P_{ij}\,\}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(P_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$$

とする。$f(x,y) \leqq g(x,y)$ より

$$\Sigma_f(\Delta;\{\,P_{ij}\,\}) \leqq \Sigma_g(\Delta;\{\,P_{ij}\,\})$$

が成立する。$\|\Delta\| \to 0$ とすると

$$\iint_D f(x,y)dxdy \leqq \iint_D g(x,y)dxdy$$

が得られる。

演習問題 2.4　　領域 D が $m(D) = 0$ のとき D 上で有界な任意の関数 f に対し

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 0$$

が成立することを示せ (定理 2.3 を用いる)。

$M = \sup\{\,|f(x,y)|\mid (x,y)\in D\}$ とおくと任意の $(x,y)\in D$ に対し

$$-M \leqq f(x,y) \leqq M$$

が成立している。積分の単調性より

$$-\iint_D M dxdy \leqq \iint_D f(x,y)dxdy \leqq \iint_D M dxdy$$

となるのが,

$$\begin{aligned}\iint_D M dxdy &= M\iint_D dxdy \\ &= Mm(D) = 0\end{aligned}$$

より

$$0 \leqq \iint_D f(x,y)dxdy \leqq 0$$

が成立する。よって

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 0$$

を得る。