解析学 II 問題解説 #6

河野

演習問題 *2.5　連続な関数 f に対し系 2.6 を証明せよ。

長方形領域 $R = \{\,(x,y) \mid a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d\,\}$ 上で定義された連続な関数を f とする。$\Delta = \{\,x_0, x_1, \ldots, x_n; y_0, y_1, \ldots, y_m\,\}$ を R の分割とする。

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \quad \|\Delta\| = \max\{\,\Delta x_i, \Delta y_j \mid i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\,\}$$

とおく。また $G(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ とおく。

$$\int_a^b G(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x)\,dx \tag{1}$$

が成立する。$\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x)\,dx$ に積分の平均値の定理を適用すると，$x_{i-1} \leqq c_i \leqq x_i$ となる c_i が存在して，

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x)\,dx = (x_i - x_{i-1})G(c_i) = G(c_i)\Delta x_i$$

が成立する。これを (1) に代入すると，

$$\int_a^b G(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x)\,dx = \sum_{i=1}^n G(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \int_c^d f(c_i, y)\,dy \tag{2}$$

となる。

$\displaystyle\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(c_i, y)\,dy$ に積分の平均値の定理を適用すると，$y_{j-1} \leqq d_{ij} \leqq y_j$ となる d_{ij} が存在して，

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(c_i, y)\,dy = (y_j - y_{j-1}) f(c_i, d_{ij}) = f(c_i, d_{ij})\Delta y_j$$

が成立する。これを (2) に代入すると

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx &= \int_a^b G(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \int_c^d f(c_i, y)\,dy \\
&= \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(c_i, y)\,dy = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^m f(c_i, d_{ij})\Delta y_j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(c_i, d_{ij})\Delta x_i \Delta y_j = \Sigma(\Delta; \{\,(c_i, d_{ij})\,\})
\end{aligned}$$

ここで $\|\Delta\| \to 0$ とすると

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx = \iint_R f(x,y)dxdy$$

が得られる。もう1つの式も同様に示すことができる。

演習問題 2.6　次の重積分について考える。ただし D は $y=x+1$ と $y=x^2-1$ で囲まれる領域とする。

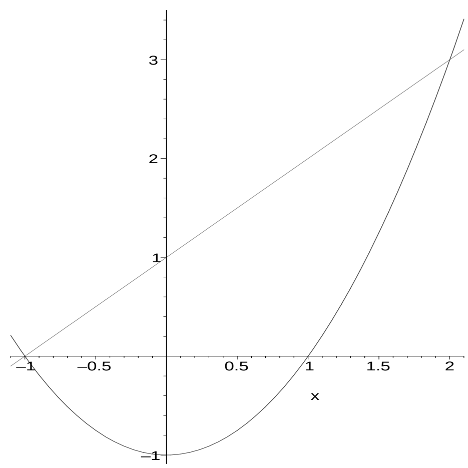
$$I=\iint_D (x+y)dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表し，その後 I を求めよ。

(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表すために, 領域 D を 2 つの領域 D_1, D_2 に分け，それぞれの領域での積分を x を先にする形の累次積分で表せ。この方法で I を計算せよ。

(1)　$x+1=x^2-1$ を解くと $x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0$ より $x=-1,2$ となる。2 つの曲線の交点は $(-1,0),(2,3)$ である。領域は次図のようになっている。



(2)

$$D=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1\leqq x\leqq 2,\ x^2-1\leqq y\leqq x+1\,\right\}$$

なので

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D (x+y)dxdy \\
&= \int_{-1}^{2}\left\{\int_{x^2-1}^{x+1}(x+y)\,dy\right\}dx \\
&= \int_{-1}^{2}\left[\,xy+\frac{y^2}{2}\,\right]_{y=x^2-1}^{x+1}dx \\
&= \int_{-1}^{2}\left\{x(1+x)-x(x^2-1)+\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{(x^2-1)^2}{2}\right\}dx \\
&= \frac{99}{20}
\end{aligned}$$

となる。

(3)　横線領域と考えると，$y \geqq 0$ のときは $y-1 \leqq x \leqq \sqrt{y+1}$ を満たすとき $(x,y) \in D$ となっているし，$y \leqq 0$ のときは $-\sqrt{y+1} \leqq x \leqq \sqrt{y+1}$ を満たすとき $(x,y) \in D$ となっている。よって $y=0$ で 2 つの領域 D_1, D_2 に分ける。$D_1 = \{\,(x,y) \in D \mid y \leqq 0\}$, $D_2 = \{\,(x,y) \in D \mid y \geqq 0\}$ とおくと $D = D_1 \cup D_2$ であり，$m(D_1 \cap D_2) = 0$ となっている。

$$D_1 = \left\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq y \leqq 0,\ -\sqrt{y+1} \leqq x \leqq \sqrt{y+1}\,\right\}$$
$$D_2 = \left\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq 3,\ y-1 \leqq x \leqq \sqrt{y+1}\,\right\}$$

なので

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} (x+y)dxdy + \iint_{D_2} (x+y)dxdy \\ &= \int_{-1}^{0} \left\{ \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} (x+y)\,dx \right\} dy + \int_{0}^{3} \left\{ \int_{y-1}^{\sqrt{y+1}} (x+y)\,dx \right\} dy \\ &= \frac{99}{20} \end{aligned}$$

となる。

演習問題 2.7　　次の重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D xdxdy \qquad D = \{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\}$　　ただし $a > 0, b > 0$ とする。

(2) $\displaystyle\iint_D \{x+y\}\,dxdy \qquad D = \{x^2 \leqq y \leqq x+2\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \{2x^2 + 3y^3\}\,dxdy \qquad D = \{x^2 + y^2 \leqq a^2\}$　　ただし $a > 0$ とする。

(4) $\displaystyle\iint_D y^n dxdy \qquad D = \{|x| + |y| \leqq 1\}$　　ただし n は自然数。

解説では図をいれてないが，領域を縦線領域または横線領域の形に正しく記述するのに，図を書くことを強く推奨する。

(1)

$$D = \left\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b\left(1 - \frac{x}{a}\right)\,\right\}$$

なので

$$\begin{aligned} I &= \iint_D xdxdy \\ &= \int_0^a \left\{ \int_0^{b(1-x/a)} x\,dy \right\} dx \\ &= \frac{a^2 b}{6} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$D = \left\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq x \leqq 2,\ x^2 \leqq y \leqq x+2\,\right\}$$

なので

$$\begin{aligned}I &= \iint_D (x+y)dxdy \\ &= \int_{-1}^{2}\left\{\int_{x^2}^{x+2}(x+y)\,dy\right\}dx \\ &= \frac{189}{20}\end{aligned}$$

となる。

(3)

$$D=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -a \leqq x \leqq a,\ -\sqrt{a^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{a^2-x^2}\,\right\}$$

なので

$$\begin{aligned}I &= \iint_D (2x^2+3y^3)dxdy \\ &= \int_{-a}^{a}\left\{\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(2x^2+3y^3)\,dy\right\}dx \\ &= \frac{\pi a^4}{2}\end{aligned}$$

となる。この問題は次の節で扱う変数変換を用いた方が計算が簡単かもしれない。

(4) 領域を 1 つの式で表現できないので，領域を 2 つに分ける。$D_1=\{\,(x,y)\in D\mid x\geqq 0\,\}, D_2=\{\,(x,y)\in D\mid x\leqq 0\,\}$ とすると $D=D_1+D_2$ となっている。

$$\begin{aligned}I_1 = \iint_{D_1} y^n dxdy &= \int_0^1\left\{\int_{x-1}^{1-x} y^n\,dy\right\}dx \\ &= \int_0^1\left[\frac{1}{n+1}y^{n+1}\right]_{y=x-1}^{1-x}dx \\ &= \int_0^1\left\{\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}-\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}\right\}dx\end{aligned}$$

となるが，n が奇数のとき ($n+1$ が偶数のとき) $I_1=0$ であり，n が偶数のとき

$$I_1=\int_0^1\frac{2}{n+1}(1-x)^{n+1}\,dx=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

となる。

$$\begin{aligned}I_2 = \iint_{D_2} y^n dxdy &= \int_{-1}^0\left\{\int_{-x-1}^{1+x} y^n\,dy\right\}dx \\ &= \int_{-1}^0\left[\frac{1}{n+1}y^{n+1}\right]_{y=-x-1}^{1+x}dx \\ &= \int_{-1}^0\left\{\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}-\frac{1}{n+1}(-x-1)^{n+1}\right\}dx\end{aligned}$$

となるが，n が奇数のとき ($n+1$ が偶数のとき) $I_2=0$ であり，n が偶数のとき

$$I_2=\int_{-1}^0\frac{2}{n+1}(1+x)^{n+1}\,dx=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

となる。よって答えは n が奇数のとき 0 であり，n が偶数のとき，$\dfrac{4}{(n+1)(n+2)}$ である。

演習問題 2.8　そのままでは計算できない累次積分でも，積分の順序を入れ替えることで積分を計算することが可能になる場合もある。次の累次積分を重積分に直し，さらに積分の順序を入れ替えた累次積分に直すことにより計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\sqrt{x^2+y^2}\, dy \right\} dx \ (a>0)$　　(2) $\displaystyle\int_1^e \left\{ \int_0^{\log x} \frac{1+y}{x}\, dy \right\} dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ t\int_0^{t^2} \cos(1-x)^2\, dx \right\} dt$

(1)　$y=\sqrt{a^2-x^2}$ とおくと $x^2+y^2=a^2$ となる。領域 D を $D=\left\{ 0 \leqq x \leqq a, 0 \leqq y \leqq \sqrt{a^2-x^2} \right\}$ とおくと

$$\int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\sqrt{x^2+y^2}\, dy \right\} dx = \iint_D x\sqrt{x^2+y^2} dxdy$$

となる。D は $D=\left\{ 0 \leqq y \leqq a, 0 \leqq x \leqq \sqrt{a^2-y^2} \right\}$ と書けるので，重積分を x を先に積分する形の累次積分に変形すると

$$\begin{aligned}\iint_D x\sqrt{x^2+y^2} dxdy &= \int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} x\sqrt{x^2+y^2}\, dx \right\} dy = \int_0^a \left[\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dy \\ &= \int_0^a \frac{1}{3}(a^3-y^3)\, dy = \frac{1}{4}a^4\end{aligned}$$

(2)　$D=\{ 1 \leqq x \leqq e, 0 \leqq y \leqq \log x \}$ とおくと

$$\int_1^e \left\{ \int_0^{\log x} \frac{1+y}{x}\, dy \right\} dx = \iint_D \frac{1+y}{x} dxdy$$

となる。D は $D=\{ 0 \leqq y \leqq 1, e^y \leqq x \leqq e \}$ と書けるので，重積分を x を先に積分する形の累次積分に変形すると

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1+y}{x} dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_{e^y}^e \frac{1+y}{x}\, dx \right\} dy = \int_0^1 (1+y)\Big[\log x \Big]_{x=e^y}^e dy \\ &= \int_0^1 (1+y)(1-y)\, dy = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(3)　$D=\left\{ 0 \leqq t \leqq 1, 0 \leqq x \leqq t^2 \right\}$ とおくと

$$\int_0^1 \left\{ t\int_0^{t^2} \cos(1-x)^2\, dx \right\} dt = \iint_D t\cos(1-x)^2 dxdy$$

となる。D は $D=\{ 0 \leqq x \leqq 1, \sqrt{x} \leqq t \leqq 1 \}$ と書けるので，

$$\iint_D t\cos(1-x)^2 dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{\sqrt{x}}^1 t\cos(1-x)^2\, dt \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \cos(1-x)^2 \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=\sqrt{x}}^1 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\cos(1-x)^2\,dx$$

となる。$u = (1-x)^2$ と変数変換すると

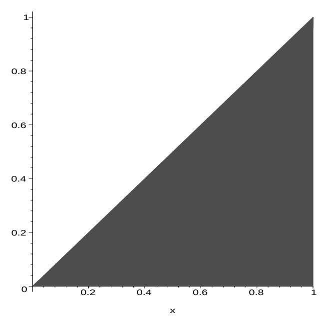
$$= \frac{1}{2}\int_1^0 (1-x)\cos u \frac{1}{-2(1-x)}\,du = \frac{1}{4}\int_0^1 \cos u\,du = \frac{\sin 1}{4}$$

演習問題 2.9　次の重積分について考える。ただし $D = \{0 \leqq y \leqq x \leqq 1\}$ とする。

$$I = \iint_D e^{-x^2} dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) D をを横線形 $(\{\,(x,y)\,|\,c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)\,\}$ の形のもの) の形で表せ。
(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。
(4) D を縦線形 $(\{\,(x,y)\,|\,a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\,\}$ の形のもの) の形で表せ。
(5) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表せ。
(6) I を求めよ。

(1)　$0 \leqq y$，$y \leqq x$，$x \leqq 1$ の 3 つの共通部分を求めればよいので次図のようになっている。



(2)

$$D = \{\,0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 1\,\}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} I &= \iint_D e^{-x^2} dxdy \\ &= \int_0^1 \left\{\int_y^1 e^{-x^2}\,dx\right\} dy \end{aligned}$$

(4)

$$D = \{\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\,\}$$

となる。

(5)

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D e^{-x^2} dxdy \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^x e^{-x^2}\, dy \right\} dx
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left\{ \int_0^x e^{-x^2}\, dy \right\} dx \\
&= \int_0^1 xe^{-x^2}\, dx
\end{aligned}
$$

なので $t = -x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = -2x$ なので

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{-1} -\frac{1}{2}e^t\, dt \\
&= \left[-\frac{1}{2}e^t \right]_{t=0}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

となる。

この問題の場合，横線領域で計算しても $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ が計算できないため，重積分の値を求めることができない。一方縦線領域で計算すると値が求まる。