解析学 II 問題解説 #7

河野

演習問題 2.10　次の重積分を求めよ。ただし a, b は正とする。括弧の中は変数変換のヒント。

(1) $I = \iint_D \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy \quad D = \left\{ x^2 + y^2 \leqq a^2 \right\} \quad (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$

(2) $I = \iint_D \dfrac{(x-y)^2}{x+y} dxdy \quad D = \{ 1 \leqq x + y \leqq 2, -1 \leqq x - y \leqq 1 \} \quad (x + y = u, x - y = v)$

(3) $I = \iint_D (x + y)\, dxdy \quad D = \left\{ x^2 + y^2 \leqq 2x \right\} \quad (x = 1 + r\cos\theta, y = r\sin\theta)$

(4) $I = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy \quad D = \left\{ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1, y \geqq 0 \right\} \quad (x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta)$

(5) $I = \iint_D \cos x \cos y dxdy \quad D = \{ 0 \leqq x + y \leqq \pi, 0 \leqq x - y \leqq \pi \} \quad (x + y = u, x - y = v)$

(6) $I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy \quad D = \left\{ x^2 + y^2 \leqq x \right\} \quad (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$

(1)　D は原点を中心とする半径 a の円の内部なので，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変数変換すると，r–θ 平面で対応する領域は

$$E = \{ (r, \theta) \mid 0 \leqq r \leqq a, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \}$$

である。この対応で E と D は $r = 0$ または $\theta = 0$，$\theta = 2\pi$ の部分を除いて一対一に対応している。この部分の面積は 0 である。またヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$

なので，$r = 0$ の部分を除いて 0 ではない。よって

$$\begin{aligned} I &= \iint_E e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} r e^{-r^2}\, d\theta \right) dt \\ &= 2\pi \int_0^a r e^{-r^2}\, dr \end{aligned}$$

ここで $u = r^2$ と置換積分を実行すると

$$= 2\pi \int_0^{a^2} \left(-\frac{1}{2} e^{-u} \right) du = 2\pi(1 - e^{-a^2})$$

となる。

(2)　$x + y = u, x - y = v$ とおくと

$$x = \frac{u + v}{2}, \qquad y = \frac{u - v}{2}$$

となる。また u–v 平面で D に対応する領域は

$$E = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \leqq u \leqq 2, -1 \leqq v \leqq 1 \right\}$$

である。E と D は一対一に対応している (線型代数の知識より：分からない人は線型代数の一次変換の部分を復習すること)。またヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

なので，常に 0 ではない。よって

$$I = \iint_E \frac{v^2}{u} \left| -\frac{1}{2} \right| dudv = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\int_{-1}^1 \frac{v^2}{u}\, dv \right) du = \frac{1}{2} \int_1^2 \left[\frac{1}{3u} v^3 \right]_{v=-1}^1 du$$
$$= \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{3} \log 2$$

となる。

(3) $x^2 + y^2 \leqq 2x$ は $(x-1)^2 + y^2 \leqq 1$ と変形できるので，領域 D は $(1,0)$ を中心とする半径 1 の円の内部 (境界を含む) である。$x = 1 + r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と極座標に変換する。$E = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \right\}$ とおくと E と D は面積 0 の部分 ($r = 0$ の部分) を除いて一対一に対応している。また $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ なので面積 0 を除いてヤコビアンは 0 ではない。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x+y)\, dxdy = \iint_E (1 + r\cos\theta + r\sin\theta) r dr d\theta \\ &= \iint_E r dr d\theta + \iint_E \left(r^2\cos\theta + r^2\sin\theta \right) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r\, dr \right) d\theta + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^2 (\cos\theta + \sin\theta)\, dr \right) d\theta \\ &= \int_0^1 r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^1 r^2\, dr \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

(4) $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$ とおく。$E = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq r \leqq 1 \right\}$ とおく。E と D は面積 0 の部分 ($r = 0$) を除いて一対一に対応している。$y \geqq 0$ なので $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ でないことに注意。また $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = abr$ なので面積 0 の部分 ($r = 0$) を除いてヤコビアンは 0 ではない。よって変数変換のための条件を満たしている。

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_E (a^2 r^2 \cos^2\theta + b^2 r^2 \sin^2\theta) abr dr d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi}\left(\int_0^1 (a^2r^2\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\theta)abr\,dr\right)d\theta \\
&= \frac{1}{4}ab\int_0^{\pi}\left(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right)d\theta \\
&= \frac{ab\pi}{8}(a^2+b^2)
\end{aligned}
$$

(5) $u = x+y, v = x-y$ とおく。$E = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq u \leqq \pi, 0 \leqq v \leqq \pi\right\}$ とおくと，E と D は一対一に対応している。また $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}$ なのでヤコビアンが 0 になる事はない。よって変数変換のための条件を満たしている。

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \cos x\cos y dxdy = \iint_E \cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\left|-\frac{1}{2}\right|dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}du\right)dv \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\cos v\,dv = 0
\end{aligned}
$$

(6) $x^2+y^2 \leqq x$ は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ と変形できるので，領域 D は $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の内部 (境界を含む) である。よって $x \geqq 0$ である。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と極座標に変換する。このとき $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となっている。また $r^2 = x^2+y^2 \leqq r\cos\theta$ より $r \leqq \cos\theta$ となる。よって $E = \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq r \leqq \cos\theta\right\}$ とおくと E と D は面積 0 の部分 $(r=0)$ を除いて一対一に対応している。$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ なので面積 $0 (r=0)$ を除いてヤコビアンは 0 ではない。よって変数変換の条件を満たしている。よって

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \iint_E \sqrt{1-r^2}\,rdrd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos\theta} r\sqrt{1-r^2}\,dr\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{\cos\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-|\sin^3\theta|\right)d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-|\sin^3\theta|\right)d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^3\theta\right)d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\left(3\sin\theta - \sin 3\theta\right)d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{6}\left[-3\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3\pi-4}{9}
\end{aligned}
$$

演習問題 2.11　次の広義積分は収束するか。収束しない場合はそれを示し，収束する場合は積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy \quad D=\{x\geqq 0, y\geqq 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^3}dxdy \quad D=\{x\geqq 0, y\geqq 0\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \cos(x^2+y^2)dxdy \quad D=\mathbb{R}^2$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^p}dxdy \quad D=\{0\leqq x^2+y^2\leqq 1\}$

(5) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy \quad D=\left\{\,0<x\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2}\,\right\}$

$\left(D_n=\left\{0<x\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2}\geqq\dfrac{1}{n}\right\}\right.$ と置き極座標に変換すると ...)

被積分関数によって近似増加列を変えた方が計算がしやすい。解説では図は書いていないが，それぞれの問題において，近似増加列を何故このように選んだか，また近似増加列になっていることを，図を描いて確認することは理解の有効な手段と考えられる。

(1)　$A_n=\{0\leqq x\leqq n, 0\leqq y\leqq n-x\}$ とおくと $\{A_n\}$ は D の近似増加列になる。

$$I_n=\iint_{A_n}\frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy$$

とおく。

$$\begin{aligned}
I_n &= \iint_{A_n}\frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy\\
&= \int_0^n\left(\int_0^{n-x}\frac{1}{(x+y+1)^2}\,dy\right)dx\\
&= \int_0^n\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{n+1}\right)dx\\
&= \log(n+1)-\frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

となるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n$ は収束しない。よって広義積分は収束しない。

(2)　$A_n=\{0\leqq x\leqq n, 0\leqq y\leqq n-x\}$ とおくと $\{A_n\}$ は D の近似増加列になる。

$$I_n=\iint_{A_n}\frac{1}{(x+y+1)^3}dxdy$$

とおく。

$$\begin{aligned}
I_n &= \iint_{A_n}\frac{1}{(x+y+1)^3}dxdy\\
&= \int_0^n\left(\int_0^{n-x}\frac{1}{(x+y+1)^3}\,dy\right)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^n\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{n^2}{(n+1)^2}$$

となるので $\lim_{n\to\infty} I_n = \dfrac{1}{2}$ となる。よって

$$\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^3}dxdy = \frac{1}{2}$$

となる。

(3) $A_n = \left\{ x^2+y^2 \leqq n^2 \right\}$ とおくと $\{A_n\}$ は D の近似増加列になる。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおき，$E_n = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi, 0 \leqq r \leqq n \right\}$ とおくと E_n と A_n は面積 0 の部分を除いて一対一に対応している。また $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ なので面積 0 を除いてヤコビアンは 0 ではない。よって変数変換の条件を満たしている。$\cos(x^2+y^2)$ は正になることも負になることもあるので，値を計算するためには，正の部分と負の部分に分けることが必要になる。しかし，この例の場合収束しないことが分かるので，正負に分けることをしなくてもすむ。

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{A_n} \cos(x^2+y^2)dxdy = \iint_{E_n} r\cos r^2 dxdy \\ &= \int_0^n \left(\int_0^{2\pi} r\cos r^2\, d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^n r\cos r^2\, dr \\ &= \pi \sin n^2 \end{aligned}$$

となる。$\lim_{n\to\infty} I_n$ は収束しないので，広義積分は収束しない。

(4) $A_n = \left\{ \dfrac{1}{n^2} \leqq x^2+y^2 \leqq 1 \right\}$ とおくと $\{A_n\}$ は D の近似増加列になる。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおき，$E_n = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi, \dfrac{1}{n} \leqq r \leqq 1 \right\}$ とおくと E_n と A_n は面積 0 の部分を除いて一対一に対応している。また $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ なので面積 0 を除いてヤコビアンは 0 ではない。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^p}dxdy = \iint_{E_n} \frac{r}{r^{2p}}drd\theta \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{r}{r^{2p}}\, d\theta \right) dr = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 r^{1-2p}\, dr \end{aligned}$$

となる。$p=1$ のとき

$$I_n = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{r}\, dr = 2\pi \log n$$

となる。$p \neq 1$ のとき

$$I_n = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 r^{1-2p}\, dr = \left[\frac{\pi}{1-p} r^{2(p-1)} \right]_{r=\frac{1}{n}}^1 = \frac{\pi}{1-p}\left(1 - n^{2(p-1)}\right)$$

となる。よって $p<1$ のとき収束して

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^p}dxdy = \frac{\pi}{1-p}$$

となり，$p \geqq 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} I_n$ は収束しないので広義積分は収束しない。

(5) $D_n = \left\{ 0 < x \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \geqq \frac{1}{n} \right\}$ とおくと $\{ D_n \}$ は D の近似増加列である。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおき，$E_n = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqq r \leqq 1, \frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \right\}$ とおくと E_n と D_n は面積 0 の部分を除いて一対一に対応している。また $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ なのでヤコビアンは 0 ではない。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{D_n} \log(x^2+y^2)dxdy = \iint_{E_n} \log r^2 \cdot r dr d\theta \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2r\log r\, d\theta \right) dr = \frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{n}}^{1} 2r\log r\, dr \\ &= \frac{\pi}{4}\left[r^2\log r - \frac{r^2}{2} \right]_{r=\frac{1}{n}}^{1} = \frac{\pi}{4}\left(\log 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}\log\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) \end{aligned}$$

ここで $-\frac{1}{n}^2 \log\frac{1}{n} = \frac{\log n}{n^2}$ であり，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

より $\lim_{n\to\infty} I_n = -\frac{\pi}{8}$ となる。よって

$$\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy = -\frac{\pi}{8}$$

である。

演習問題 2.12　次の問に答えながら $I = \int_0^\infty \exp\left(-x^2\right)\, dx$ を求めよ[1]。そのために広義積分

$$J = \iint_D \exp\left(-x^2-y^2\right) dxdy \qquad D = \{x \geqq 0, y \geqq 0\}$$

を計算する。

(1) 自然数 n に対し $A_n = \{0 \leqq x, 0 \leqq y, x^2+y^2 \leqq n^2\}$ とおく。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変数変換変換して $J_n = \iint_{A_n} \exp\left(-x^2-y^2\right) dxdy$ を求めよ。

(2) J を求めよ。

[1] $\exp f(x) = e^{f(x)}$ である。肩に乗っている指数が見にくい場合はこの様な記法も使う。

(3) 自然数 n に対し $B_n = \{0 \leqq x \leqq n, 0 \leqq y \leqq n\}$ とおく。$K_n = \iint_{B_n} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy$ とするとき $K_n = \left\{\int_0^n \exp\left(-x^2\right)\, dx\right\}^2$ が成立する事を示せ。

(4) I を求めよ。

(1) $E_n = \left\{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}, 0 \leqq r \leqq n\right\}$ とおくと $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ の対応で E_n と A_n は面積 0 を除いて一対一に対応している。ヤコビアンは $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ なので

$$
\begin{aligned}
J_n &= \iint_{A_n} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy = \iint_{E_n} \exp\left(-r^2\right) r dr d\theta \\
&= \int_0^n \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\exp\left(-r^2\right)\, d\theta\right) dr = \frac{\pi}{2}\int_0^n r\exp\left(-r^2\right)\, dr \\
&= \frac{\pi}{4}\left(1 - \exp\left(-n^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

となる。

(2)

$$
J = \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1 - \exp\left(-n^2\right)\right) = \frac{\pi}{4}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
K_n &= \iint_{B_n} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy = \int_0^n \left(\int_0^n \exp\left(-x^2 - y^2\right)\, dy\right) dx \\
&= \int_0^n \left(\int_0^n \exp\left(-x^2\right)\exp\left(-y^2\right)\, dy\right) dx = \int_0^n \left(\exp\left(-x^2\right)\int_0^n \exp\left(-y^2\right)\, dy\right) dx \\
&= \int_0^n \exp\left(-y^2\right)\, dy \int_0^n \exp\left(-x^2\right)\, dx = \int_0^n \exp\left(-x^2\right)\, dx \int_0^n \exp\left(-x^2\right)\, dx \\
&= \left\{\int_0^n \exp\left(-x^2\right)\, dx\right\}^2
\end{aligned}
$$

となる。

(4)

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= J = \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^n \exp\left(-x^2\right)\, dx\right\}^2 \\
&= \left\{\lim_{n\to\infty}\int_0^n \exp\left(-x^2\right)\, dx\right\}^2 = \left\{\int_0^\infty \exp\left(-x^2\right)\, dx\right\}^2 = I^2
\end{aligned}
$$

となるので

$$
I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}
$$

となる。