解析学 II 問題解説 #8

河野

演習問題 2.13　次の積分値を求めよ。

(1) $\displaystyle\iiint_D y dxdydz \quad D = \left\{ x^2+y^2+z^2 \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0 \right\}$

(2) $\displaystyle\iiint_D z dxdydz \quad D = \left\{ 0 \leqq x \leqq y^2, z \leqq y \leqq 2z, 0 \leqq z \leqq 1 \right\}$

(3) $\displaystyle\iiint_D z^2 dxdydz \quad D = \left\{ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqq 1 \right\} (a,b,c>0)$

(4) $\displaystyle\iiint_D \left(x+y^2z\right) dxdydz \quad S = \left\{ 0 \leqq z \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1, x \geqq 0 \right\}$

(1)　x, y, z に関し対象なので領域の表示の方法は色々あるが，ここでは

$$D = \{ a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x), h_1(x,y) \leqq z \leqq h_2(x,y) \}^{(1)}$$

の形に表現することにする。D は半径 1 の (境界を含む) 球体の内部と $\{ x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0 \}$ の共通部分なので $0 \leqq x \leqq 1$ が分かる。x を固定したとき x 座標が x の平面と D との共通部分を y-z 平面で見る。この共通部分を D_x とおくと

$$D_x = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y^2+z^2 = 1-x^2, y \geqq 0, z \geqq 0 \right\}$$

である。即ち原点中心の半径 $\sqrt{1-x^2}$ の円と $\{ y \geqq 0, z \geqq 0 \}$ の共通部分である。

$$D_x = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}, 0 \leqq z \leqq \sqrt{1-x^2-y^2} \right\}$$

と表示できるので $D = \left\{ 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}, 0 \leqq z \leqq \sqrt{1-x^2-y^2} \right\}$ となる。

$$\begin{aligned}
\iiint_D y dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} y\,dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(y\sqrt{1-x^2-y^2} \right) dy \right) dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= \frac{\pi}{16}
\end{aligned}$$

(2)　この問題では領域はすでに

$$\left\{ 0 \leqq z \leqq 1, z \leqq y \leqq 2z, 0 \leqq x \leqq y^2 \right\}$$

---

(1) ここでは省略した形の表示をしている。すなわち $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \cdots \right\}$ を $\{ \cdots \}$ と略して表示している。ここので の集合を省略しない形で書くと，$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x), h_1(x,y) \leqq z \leqq h_2(x,y) \right\}$ となる。

と表示されているので

$$\begin{aligned}\iiint_D zdxdydz &= \int_0^1 \left(\int_z^{2z} \left(\int_0^{y^2} z\,dx\right) dy\right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_z^{2z} zy^2\,dy\right) dz \\ &= \int_0^1 \frac{7z^4}{3}\,dz \\ &= \frac{7}{15}\end{aligned}$$

となる。

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ を通る楕円である。$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ は $(\pm a, 0, 0), (0, \pm b, 0), (0, 0, \pm c)$ を通る「楕円面」(ゆがんだラグビーボールの様なもの) である。x の範囲は $-a \leqq x \leqq a$ である。x を 1 つ固定し，x 座標が x の平面と D との共通部分 D_x を y-z 平面で見る。$D_x = \left\{ \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1-\dfrac{x^2}{a^2} \right\}$ となっているが，$\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2}$ は

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

と変形できるので楕円である。よって

$$D_x = \left\{ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leqq y \leqq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \leqq z \leqq c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \right\}$$

と表示できる。以上により

$$\begin{aligned}\iiint_D z^2 dxdydz &= \int_{-a}^{a} \left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z^2\,dz\right) dy\right) dx \\ &= \frac{4abc^3\pi}{15}\end{aligned}$$

となる。

変数変換をせずにこのままの形で累次積分にすると 1 変数関数の積分はかなり複雑になる。変数変換をしてから累次積分に直す次の演習問題も参考にせよ。

(4) x, y, z の順で表示することにする。$\sqrt{x^2+y^2} \leqq 1$ より $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たさなければならない。$y=0$ のとき $x=1$ となるのが最大なので $0 \leqq x \leqq 1$ である。x を 1 つ固定すると $\sqrt{x^2+y^2} \leqq 1$ より $x^2+y^2=1$，よって

$$-\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}$$

となる。x, y を固定すると $0 \leqq z \leqq \sqrt{x^2+y^2}$ なので

$$D = \left\{ 0 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}, 0 \leqq z \leqq \sqrt{x^2+y^2} \right\}$$

と表現できる。

$$\begin{aligned}\iiint_D \left(x+y^2z\right) dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \left(x+y^2z\right)\, dz\right) dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y^2(x^2+y^2)}{2}\right) dy\right) dx\end{aligned}$$

となり，

$$\int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2}+x^3\log(\sqrt{1-x^2}+1)+\frac{(1-x^2)^{5/2}}{2}+\frac{x^2(1-x^2)^{3/2}}{3}-\frac{1}{2}x^3\log(x^2)\right) dx$$

となる。これを積分して

$$\frac{29}{48}+\frac{\pi}{24}$$

を得る。

演習問題 2.14　積分 $I=\iiint_D z^2dxdydz$ $(D=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1\right\}$ ここで $a,b,c>0$ とする$)$ を考える (演習問題 2.13 (3) の問題)。

(1) $x=au, y=bv, z=cw$ とおいて変数変換せよ。

(2) さらに極座標に変換し積分を求めよ。

(1)　uvw–空間の領域 D' を $D'=\left\{u^2+v^2+w^2\leqq 1\right\}$ とおく。(x,y,z) が (u,v,w) に対応しているとする。即ち $x=au, y=bv, z=cw$ が成立しているとする。このとき $(u,v,w)\in D'$ のとき $u^2+v^2+w^2\leqq 1$ が成立しているので $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\leqq 1$ が成立する。よって $(x,y,z)\in D$ となる。逆に任意の点 $(x,y,z)\in D$ に対し $u=\frac{x}{a}, v=\frac{y}{b}, w=\frac{z}{c}$ とおくと (u,v,z) は (x,y,z) に写される。この対応で D' と D は対応している。この対応は線型写像であり，$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=abc\neq 0$ なので D と D' は一対一に対応している。また $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)}=0$ となる点はない。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned}I &= \iiint_D z^2dxdydz \\ &= \iiint_{D'} (cw)^2abcdudvdw \\ &= abc^3\iiint_{D'} w^2dudvdw\end{aligned}$$

(2)　$u=r\sin\theta\cos\varphi, v=r\sin\theta\sin\varphi, w=r\cos\theta$ とおく。$r\theta\varphi$–空間の領域 E を $E=\{0\leqq r\leqq 1, 0\leqq\theta\leqq\pi, 0\leqq\varphi\leqq 2\pi\}$ とおく。(u,v,w) を (r,θ,φ) に対応する点とする。$(r,\theta,\varphi)\in E$ のとき $(u,v,w)\in D'$ が成立する。逆に任意の $(u,v,w)\in D'$ に対し $r=\sqrt{u^2+v^2+r^2}$ とおく。$r=0$ のときは $\theta=0,\varphi=0$ と定める。$r\neq 0$ のときは $\frac{w}{r}=\cos\theta$ となる θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ に唯 1 つ存在

するので，それを θ と定める。$\theta = 0$ または $\theta = \pi$ のときは $\varphi = 0$ と定める。$\theta \neq 0, \pi$ のときは $\dfrac{u}{r\sin\theta} = \cos\varphi$，$\dfrac{v}{r\sin\theta} = \sin\varphi$ を満たす φ が $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ に唯 1 つ存在するので，それを φ と定める。このように定めると (r, θ, φ) に対応する点は (u, v, w) となる。

$r = 0$ のときは θ, φ によらず (r, θ, φ) は原点 $(0, 0, 0)$ に写されるので一対一ではない。よって $r \neq 0$ の場合を考える。このとき一対一にならない点を探す。2 点 $(r, \theta, \varphi), (r', \theta', \varphi')$ が同じ点 (u, v, w) に写されているとする。ただし $r \neq 0, r' \neq 0$ とする。

$$
\begin{aligned}
u^2 + v^2 + w^2 &= \big(r\sin\theta\cos\varphi\big)^2 + \big(r\sin\theta\sin\varphi\big)^2 + \big(r\cos\theta\big)^2 \\
&= r^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\cos^2\theta = r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r^2
\end{aligned}
$$

が成立し，また同時に

$$
\begin{aligned}
u^2 + v^2 + w^2 &= \big(r'\sin\theta'\cos\varphi'\big)^2 + \big(r'\sin\theta'\sin\varphi'\big)^2 + \big(r'\cos\theta'\big)^2 \\
&= r'^2\sin^2\theta'(\cos^2\varphi' + \sin^2\varphi') + r'^2\cos^2\theta' = r'^2(\sin^2\theta' + \cos^2\theta') = r'^2
\end{aligned}
$$

も成立するので $r = r'$ である。よって

$$
\sin\theta\cos\varphi = \sin\theta'\cos\varphi', \quad \sin\theta\sin\varphi = \sin\theta'\sin\varphi' \quad \cos\theta = \cos\theta'
$$

が成立している。$0 \leqq \theta, \theta' \leqq \pi$ では $\cos x$ は単調減少関数である。よって $\cos\theta = \cos\theta'$ より $\theta = \theta'$ が成立している。$\sin\theta \neq 0$ のときは

$$
\cos\varphi = \cos\varphi', \quad \sin\varphi = \sin\varphi'
$$

が共に成立しているので $\varphi = \varphi'$ となり，一対一である。$\sin\theta = 0$ のとき即ち $\theta = 0, \pi, 2\pi$ のときは φ, φ' がどのような値でも等号が成立するので一対一ではない。以上により $\{\, r = 0 \,\} \cup \{\, \theta = 0 \,\} \cup \theta = \pi \cup \{\, \theta = 2\pi \,\}$ を除いて一対一であることが分かる。この部分の面積は 0 である。また $\dfrac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2\sin\theta$ なので，D' と E は面積 0 の部分を除いて一対一であり，面積 0 の部分を除いて $\dfrac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \neq 0$ である。よって変数変換の条件を満たしている。

$$
\begin{aligned}
I &= abc^3 \iiint_E r^2\cos^2\theta r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi \\
&= \frac{4abc^3\pi}{15}
\end{aligned}
$$

演習問題 2.15　次の積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iiint_D \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz \qquad D = \left\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2 \,\right\}$

(2) $\displaystyle\iiint_D dxdydz \qquad D = \left\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqq x + y \leqq 1, 0 \leqq y + z \leqq 1, 0 \leqq z + x \leqq 1 \,\right\}$

(1)　この積分は直接累次積分でもできるが，形から言えば変数変換した方が簡単だと予想される。

$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$ とおく。$r\theta\varphi$–空間の領域 E を

$$E = \{0 \leqq r \leqq a, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\}$$

とおく。前問で示したようにこの変換は積分の変数変換可能のための条件を満たしている。積分の値を I とすると

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_E r^2 \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\
&= \int_0^a \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} r^4 \sin\theta \, d\varphi \right) d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^a \left(\int_0^\pi r^4 \sin\theta \, d\theta \right) dr \\
&= 2\pi \int_0^a \left(\Big[-r^4 \cos\theta \Big]_{\theta=0}^{\pi} \right) dr = 4\pi \int_0^a r^4 \, dr \\
&= \frac{4\pi a^5}{5}
\end{aligned}$$

となる。

(2) $p = x + y, q = y + z, r = z + x$ とおくと

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

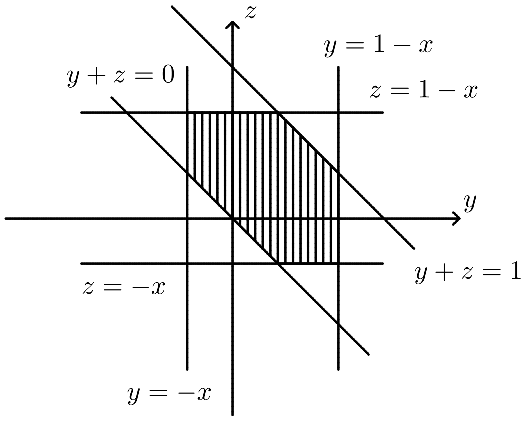
となる。両辺に逆行列をかけることにより

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

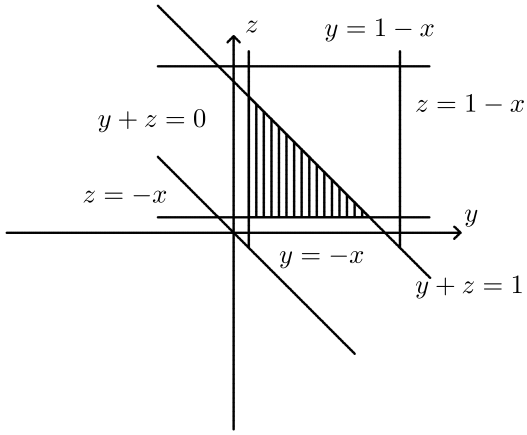
を得る。$x = \frac{1}{2}(p - q + r)$ であり，$0 \leqq p \leqq 1, 0 \leqq q \leqq 1, 0 \leqq r \leqq 1$ なので $p = 1, r = 1, q = 0$ のとき x は最大になり，$p = 0, r = 0, q = 1$ のとき最小になる。よって $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ となる。x 座標が x である平面と D との交わりを D_x とすると，

$$D_x = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq y + z \leqq 1, -x \leqq y \leqq 1 - x, -x \leqq z \leqq 1 - x \right\}$$

となる。$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ のときは下図のようになっている。($\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ のときの図を各自描いてみよ。)



$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$



$x<0$

D を分割する。

$$D_1=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\frac{1}{2}\leqq x\leqq 0, -x\leqq y\leqq 1+x, -x\leqq z\leqq 1-z\right\}$$
$$D_2=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq \frac{1}{2}, -x\leqq y\leqq x, -y\leqq z\leqq 1-x\right\}$$
$$D_3=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq \frac{1}{2}, x\leqq y\leqq 1-x, -x\leqq z\leqq 1-y\right\}$$
$$D_4=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{2}\leqq x\leqq 1, x-1\leqq y\leqq 1-x, -y\leqq z\leqq 1-x\right\}$$

とおくと

$$D=D_1+D_2+D_3+D_4$$

となっているので

$$\begin{aligned}
I=&\iiint_D dxdydz\\
=&\iiint_{D_1} dxdydz+\iiint_{D_2} dxdydz+\iiint_{D_3} dxdydz+\iiint_{D_4} dxdydz\\
=&\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(\int_{-x}^{1+x}\left(\int_{-x}^{1-z} dz\right)dy\right)dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-x}^{x}\left(\int_{-y}^{1-x} dz\right)dy\right)dx\\
&+\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_{x}^{1-x}\left(\int_{-x}^{1-y} dz\right)dy\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{x-1}^{1-x}\left(\int_{-y}^{1-x} dz\right)dy\right)dx
\end{aligned}$$

となる。あとはこの積分を実行していけばよい。

ここで変数変換による別の方法も紹介しておく。 p,q,r を解説の最初でおいたものとする。

$$E=\left\{(p,q,r)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0\leqq p\leqq 1, 0\leqq q\leqq 1, 0\leqq r\leqq 1\right\}$$

とおくと D と E は一対一に対応している。また $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(p,q,r)} = \dfrac{1}{2}$ である。よって

$$\begin{aligned} I =& \iiint_D dxdydz = \iiint_E \frac{1}{2} dpdqdr \\ =& \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 dp \right) dq \right) dr \\ =& \frac{1}{2} \end{aligned}$$

演習問題 2.16 次の広義積分は収束するか。収束・発散を判定し収束するときはそれを計算せよ。ここで a, p は定数で $a > 0$ とする。

(1) $I = \displaystyle\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz \qquad D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \leqq x^2+y^2+z^2 \right\}$

(2) $I = \displaystyle\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dxdydz \qquad D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 < x^2+y^2+z^2 \leqq 1 \right\}$

(3) $I = \displaystyle\iiint_D \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} dxdydz \qquad D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \leqq a^2 \right\}$

(4) $I = \displaystyle\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p} dxdydz \qquad D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \leqq x^2+y^2+z^2, z \geqq 0 \right\}$

(5) $I = \displaystyle\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p} dxdydz \qquad D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 < x^2+y^2+z^2 \leqq 1, y \geqq 0, z \geqq 0 \right\}$

(1) D の近似増加列として，$D_n = \left\{ 1 \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq n^2 \right\}$ をとる。

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

とおくと $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ である。$E_n = \{ 1 \leqq r \leqq n, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \}$ とおくと D_n と E_n は面積 0 の部分を除いて一対一に対応しており，ヤコビアンが 0 になる領域は面積 0 である (演習問題 2.10 で示してあるので証明は省略する) 。よって変数変換の条件を満たしているので，

$$\begin{aligned} I_n &= \iiint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz \\ &= \iiint_{E_n} \frac{1}{r^4} r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi = \iiint_{E_n} \frac{1}{r^2} \sin\theta drd\theta d\varphi \\ &= \int_1^n \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}\sin\theta\, d\varphi \right) d\theta \right) dr \\ &= 2\pi \int_1^n \left(\int_0^\pi \frac{1}{r^2}\sin\theta\, d\theta \right) dr \\ &= 4\pi \int_1^n \frac{1}{r^2}\, dr = 4\pi\left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

となる。広義積分は収束し

$$\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz = \lim_{n\to\infty} I_n = 4\pi$$

となる。

(2) D の近似増加列として，$D_n = \left\{ \dfrac{1}{n^2} \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1 \right\}$ をとる。

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

とおくと $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ である。$E_n = \left\{ \dfrac{1}{n} \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \right\}$ とおくと D_n と E_n は面積 0 の部分を除いて一対一に対応しており，ヤコビアンが 0 になる領域は面積 0 である (演習問題 2.10 で示してあるので証明は省略する) 。よって変数変換の条件を満たしているので,

$$\begin{aligned}
I_n &= \iiint_{D_n} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dxdydz \\
&= \iiint_{E_n} \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi = \iiint_{E_n} \sin\theta drd\theta d\varphi \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\varphi \right) d\theta \right) dr \\
&= 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \right) dr \\
&= 4\pi \int_{\frac{1}{n}}^{1} dr = 4\pi\left(1 - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

よって

$$\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dxdydz = \lim_{n\to\infty} I_n = 4\pi$$

(3) D の近似増加列として $D_n = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 \leqq \left(a - \dfrac{1}{n}\right)^2 \right\}$ をとる。

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

とおくと $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ である。$E_n = \left\{ 0 \leqq r \leqq a - \dfrac{1}{n}, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \right\}$ とおくと D_n と E_n は面積 0 の部分を除いて一対一に対応しており，ヤコビアンが 0 になる領域は面積 0 である (演習問題 2.10 で示してあるので証明は省略する) 。よって変数変換の条件を満たしているので,

$$\begin{aligned}
I_n &= \iiint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} dxdydz \\
&= \iiint_{E_n} \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi \\
&= \int_0^{a-\frac{1}{n}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2-a^2}}\, d\varphi \right) d\theta \right) dr \\
&= 4\pi \int_0^{a-\frac{1}{n}} \frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\, dr
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = -\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2 \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$$

が成立するので，

$$I_n = a^2\pi^2$$

となる。

(4)　D の近似増加列として，$D_n = \left\{ 1 \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq n^2, z \geqq 0 \right\}$ をとる。

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

とおくと $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ である。$E_n = \left\{ 1 \leqq r \leqq n, 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \right\}$ とおくと (θ の範囲に注意，何故そうなるか確認を。)，D_n と E_n は面積 0 の部分を除いて一対一に対応しており，ヤコビアンが 0 になる領域は面積 0 である。よって変数変換の条件を満たしているので，

$$\begin{aligned}
I_n &= \iiint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p} dxdydz \\
&= \iiint_{E_n} \frac{1}{r^{2p}} r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi = \iiint_{E_n} \frac{1}{r^{2(p-1)}} \sin\theta drd\theta d\varphi \\
&= \int_1^n \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{2(p-1)}} \sin\theta \, d\varphi \right) d\theta \right) dr \\
&= 2\pi \int_1^n \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^{2(p-1)}} \sin\theta \, d\theta \right) dr \\
&= 2\pi \int_1^n r^{2(1-p)} \, dr \\
&= \begin{cases} \dfrac{2\pi}{2(1-p)+1} \left(n^{2(1-p)+1} - 1^{2(1-p)+1} \right), & 2(1-p)+1 \neq 0 \\ 2\pi \left(\log n - \log 1 \right), & 2(1-p)+1 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

となる。$2(1-p)+1 \geqq 0$ のとき，即ち $p \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき広義積分は収束しない。$p > \dfrac{3}{2}$ のとき

$$\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p} dxdydz = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{2\pi}{2p-3}$$

となる。

(5)　D の近似増加列として，$D_n = \left\{ \dfrac{1}{n} \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq 1, y \geqq 0, z \geqq 0 \right\}$ をとる。

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

とおくと $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ である。$E_n = \left\{ \dfrac{1}{n} \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq \varphi \leqq \pi \right\}$ とおくと (θ, φ の範囲に注意，何故そうなるか確認を。)，D_n と E_n は面積 0 の部分を除いて一対一に対応

しており，ヤコビアンが 0 になる領域は面積 0 である。よって変数変換の条件を満たしているので，

$$
\begin{aligned}
I_n &= \iiint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p} dxdydz \\
&= \iiint_{E_n} \frac{1}{r^{2p}} r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi = \iiint_{E_n} \frac{1}{r^{2(p-1)}} \sin\theta drd\theta d\varphi \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \frac{1}{r^{2(p-1)}} \sin\theta \, d\varphi \right) d\theta \right) dr \\
&= \pi \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^{2(p-1)}} \sin\theta \, d\theta \right) dr \\
&= \pi \int_{\frac{1}{n}}^{1} r^{2(1-p)} \, dr \\
&= \begin{cases} \dfrac{2\pi}{2(1-p)+1} \left(1^{2(1-p)+1} - \left(\dfrac{1}{n}\right)^{2(1-p)+1} \right), & 2(1-p)+1 \neq 0 \\ 2\pi \left(\log n - \log 1\right), & 2(1-p)+1 = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

となる。$2(1-p)+1 \leqq 0$ のとき，即ち $p \geqq \dfrac{3}{2}$ のとき広義積分は収束しない。$p < \dfrac{3}{2}$ のとき

$$
\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p} dxdydz = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{2\pi}{2p-3}
$$

となる。

演習問題 2.17　半径 r の球の体積を求めよ。$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq r^2 \right\}$ とし，$f(x,y) = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$, $g(x,y) = -\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ と考えよ。

$x = s\cos\theta, y = s\sin\theta$ とおくと (極座標への変換なので s の部分は r と置きたいのだが，すでに r が定数として使われているので s と置いた。) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,\theta)} = s$ である。$E = \{\, 0 \leqq s \leqq r, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \,\}$ とおくと D と E は面積 0 の部分を除いて一対一に対応し，ヤコビアンが 0 になる領域の面積も 0 である (2 次元の場合の極座標変換に関してはすでに条件チェックを行っているので，ここでは省略する。)。よって変数変換の条件を満たしている。

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D \left(\sqrt{r^2-x^2-y^2} - \left(-\sqrt{r^2-x^2-y^2} \right) \right) dxdy \\
&= 2 \iint_E \sqrt{r^2-s^2} s ds d\theta \\
&= 2 \int_0^r \int_0^{2\pi} s\sqrt{r^2-s^2} \, d\theta \, ds \\
&= 4\pi \int_0^r s\sqrt{r^2-s^2} \, ds = \frac{4\pi r^3}{3}
\end{aligned}
$$

演習問題 2.18　$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, 0 \leqq y \leqq f(x) \right\}$ を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を上の方法で求めよ。

$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, 0 \leqq y \leqq f(x) \right\}$ が xyz–空間の中の xy–平面に入っていると考え，x–軸の回りに C を回転させてできる領域を D とする。$D = \left\{ a \leqq x \leqq b, \sqrt{y^2+z^2} \leqq f(x) \right\}$ と表される。D の体積を $\mathrm{Vol}(D)$ とすると，

$$\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D dxdydz$$

である。$x = x, y = r\cos\theta, z = r\sin\theta$ と置くと，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,r,\theta)} = r$ である。

$$E = \left\{ (x,r,\theta) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, 0 \leqq r \leqq f(x), 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \right\}$$

とおく。(x,r,θ) が (x,y,z) に対応しているとする。$y^2+z^2 = r^2$ なので $(x,r,\theta) \in E$ のとき $(x,y,z) \in D$ となっている。また任意の $(x,y,z) \in D$ に対し (x,y,z) に写る元 $(x,r,\theta) \in E$ が存在する。この対応で E と D が対応していることが分かるが一対一を調べる。$r = 0$ のときは一対一でないので $r \neq 0$ の場合を調べる。$(x,r,\theta), (x',r',\theta')$ が同じ点 (x,y,z) に対応しているとする。$x = x = x'$ なので $x = x'$ である。また $r^2 = y^2+z^2 = r'^2$ より $r = r'$ となる。今 $r \neq 0$ なので

$$\cos\theta = \cos\theta', \quad \sin\theta = \sin\theta'$$

となっている。よって $\theta \neq 0$ かつ $\theta \neq 2\pi$ のときは $\theta = \theta'$ となり一対一である。$\theta = 0$ または $\theta = 2\pi$ のときは一対一ではない。以上によりこの対応で体積 0 の領域を除いて一対一であり，体積 0 の領域を除いてヤコビアンは 0 ではないことが分かる。よって変数変換の条件を満たしているので，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) &= \iiint_D dxdydz \\
&= \iiint_E r dxdrd\theta \\
&= \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} \left(\int_0^{2\pi} r\, d\theta \right) dr \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} 2\pi r\, dr \right) dx \\
&= \pi \int_a^b \left[r^2 \right]_{r=0}^{f(x)} dx \\
&= \pi \int_a^b \{f(x)\}^2\, dx
\end{aligned}$$

演習問題 2.19　一様な密度をもつ半球体 $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \leqq r^2, x \geqq 0 \right\}$ の重心の位置を求めよ。

$x = s\sin\theta\cos\varphi, y = s\sin\theta\sin\varphi, z = s\cos\theta$ とおく。$E = \left\{ 0 \leqq s \leqq r, 0 \leqq \theta \leqq \pi, -\dfrac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2} \right\}$ に対し，この対応で面積 0 の領域を除いて D と一対一に対応しており，ヤコビアンが 0 の面積も

0 である (演習問題 2.10 で示してあるので証明は省略する) 。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned} K &= \iiint_D dxdydz \\ &= \iiint_E s^2 \sin\theta dsd\theta d\varphi \\ &= \frac{2\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} \iiint_D xdxdydz &= \iiint_E xdsd\theta d\varphi \\ &= \int_0^r \left(\int_0^\pi \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} s\sin\theta\cos\varphi s^2 \sin\theta\, d\varphi \right) d\theta \right) ds \\ &= \int_0^r s^3\, ds \cdot \int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \\ &= \frac{r^4}{4}\frac{\pi}{2}2 = \frac{\pi r^4}{4} \end{aligned}$$

同様に計算して $\iiint_D ydxdydz = 0, \iiint_D zdxdydz = 0$ が分かる。よって重心は

$$\left(\frac{3}{8}r, 0, 0\right)$$

である。