解析学 I 演習に対する追加説明#1

- **だるま状態**の人が結構いました。そのような人は演習中に質問して下さい。考えながら学習していて，結果までたどり着けずにそのような状態になったのなら，まだいいですが，何もせずにただ時間が過ぎたというのでは，せっかくの演習の時間が無駄になります。

- 演習 1.10 は講義で述べた結果を使ってもいいですし，定義に基づいて最初から計算してもどちらでもいいです。

- 最初は結果を使用して段々慣れてきたら「定義に基づいて」やる，というのがいいかもしれません。最終的には「定義に基づいて計算せよ」と要求されたらできるようにしておいて下さい。

- 演習問題 1.10 (1) を解きます。最初は次の結果を使います。

> $y = f(x)$ を $x = a$ で一番よく近似する 2 次式は $x = a+h$ とするとき $g(h) = f(a) + f'(a)h + \dfrac{f''(a)}{2}h^2$ である。

- 問題は $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ で $a = 0$ です。$f'(x) = -\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $f''(x) = -\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ なので $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$f'(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $f''(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。よって求める 2 次式は
$$g(h) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h - \frac{1}{2\sqrt{2}}h^2$$
である。

- 次は定義に基づいてやります。

> $g(h) = A + Bh + Ch^2$ が $x = a$ で $y = f(x)$ を最もよく近似する 2 次式であるとは，$d(h) = f(a+h) - g(h), \varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h^2}$ とおくとき
> $$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$
> が成立することである。

- $d(h) = \varepsilon(h)h^2$ なので $\lim_{h\to 0} d(h) = 0$ が成立する。よって

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{h\to 0} d(h) &= \lim_{h\to 0} \left(f(a+h) - g(h)\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\cos\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - \left(A + Bh + Ch^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} - A
\end{aligned}$$

より $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

- $\dfrac{d(h)}{h} = \varepsilon(h)h$ なので $\lim_{h\to 0} \dfrac{d(h)}{h} = 0$ が成立する。よって

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - g(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + Bh + Ch^2\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - (B + 2Ch)}{1} \qquad \text{(ロピタルの定理を使用)} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} - B
\end{aligned}$$

より $B = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

- $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立する。よって

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - g(h)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h + Ch^2\right)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 2Ch\right)}{2h} \qquad \text{(ロピタルの定理を使用)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\cos\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - 2C}{2} \qquad \text{(ロピタルの定理を使用)} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 2C\right)
\end{aligned}$$

より $C = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ である。

- 以上により求める 2 次式は

$$g(h) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h - \frac{1}{2\sqrt{2}}h^2$$