解析学 I 演習に対する追加説明#2

- テーラーの定理を用いた近似についてもう一度説明しておきます。
- 演習 1.18 を例にする。演習問題 1.18 は次であった。

> $f(x) = \cos x$ を $a = 0, n = 6$ としてテイラーの定理を用いて表し，その剰余項 R_6 を切り捨てることにより $\cos \dfrac{\pi}{10}$ の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。
> 更に同様な方法で誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決め近似値を求めよ。計算実行には電卓等[(1)]を用いてよい。

- テーラーの定理は次のものであった。

> 次を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。
>
> $$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n$$
>
> $R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ であり，これを**剰余項**と呼ぶ。

- $x = a + h$ とする。h を用いて表すこともある。また $c = a + \theta(x-a)$ とするとき，剰余項を $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n$ と書くこともある。
- 剰余項 R_n を切り捨てた

$$g(h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k$$

で $f(a+h)$ を近似する。このとき誤差

$$\Delta = f(a+h) - g(h)$$

は R_n である。

(1) 厳密に考えると，電卓の計算誤差も考える必要があるが，ここでは考えない。

- $f(x) = \cos x, a = 0$ が指定されている。今 $\cos \dfrac{\pi}{10}$ の近似値を求めるので $x = a + h = 0 + h = \dfrac{\pi}{10}$ とする。

  $f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f^{(3)}(x) = \sin x, f^{(4)}(x) = \cos x, f^{(5)}(x) = -\sin x, f^{(6)}(x) = -\cos x$ なので $f(0) = 1, f''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 1, f'(0) = f^{(3)}(0) = f^{(5)}(0) = 0$ となる。テーラーの定理より

$$f(h) = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{4!}h^4 + R_6 \qquad \left(R_6 = \frac{-\cos c}{6!}h^6\right)$$

- $g(h) = 1 - \dfrac{1}{2}h^2 + \dfrac{1}{4!}h^4$ とおくと $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ の近似値は

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \fallingdotseq g\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 0.9510578492071949$$

  となる。$f^{(6)}(x) = -\cos x$ なので $\left|f^{(6)}(c)\right| \leqq 1$ となっている。よって誤差は

$$|\Delta| = \left|\frac{-\cos c}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6\right| \leqq \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < \frac{1}{6!}\left(\frac{4}{10}\right)^6 = 5.688889 \times 10^{-6}$$

  と評価できる。

- 後半を考える。誤差が 10^{-10} 以下になるように n を定める。

- $f^{(n)}(x)$ は $\pm\cos x, \pm\sin x$ のいずれかなので $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqq 1$ が成立する。剰余項 R_n は

$$|R_n| = \left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n\right| \leqq \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^n < \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-10}$$

  を満たしていればよい。不等式は $n! \times \left(\dfrac{5}{2}\right)^n > 10^{10}$ となる。

- $n = 10$ のとき

$$10! \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{10} = \frac{138427734375}{4} = 3.460693359375 \times 10^{10} > 10^{10}$$

  となるので $n = 10$ が求めるものである。

- $g_9(h) = 1 - \dfrac{1}{2}h^2 + \dfrac{1}{4!}h^4 - \dfrac{1}{6!}h^6 + \dfrac{1}{8!}h^8$ とおくと

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \fallingdotseq g_9\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0.9510565162977323$$