解析学I演習に対する追加説明#3

- テーラーの定理は次のものであった。

> 次を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。
>
> $$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n$$
>
> $R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ であり，これを**剰余項**と呼ぶ。

- $R_n \to 0\ (n \to \infty)$ が成立するとき，テイラーの定理から

> $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

  が得られる。これを $x = a$ におけるテーラー級数という。

- だから「テーラー級数を求めよ」という問題は，収束性を除けば，n **次導関数を求める**問題である。

- 次の問題を考える

> $f(x) = \log(x+2)$ の $x = 0$ におけるテーラー級数を求めよ。

- n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ の形を予想するため何回か微分してみる。

$$f'(x) = \frac{1}{x+2}$$
$$f''(x) = -(x+2)^{-2}$$
$$f^{(3)}(x) = 2(x+2)^{-3}$$

- ここで $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}n(x+1)^{-n}$ と予想するのはチト気が早い。

- 更に微分すると

$$
\begin{aligned}
f^{(4)}(x) &= -6(x+2)^{-4} \\
f^{(5)}(x) &= 24(x+2)^{-5} \\
f^{(6)}(x) &= -120(x+2)^{-6}
\end{aligned}
$$

  となる。

- $6 = 3\times2\times1 = 3!, 24 = 4\times3\times2\times1 = 4!, 120 = 5\times4\times3\times2\times1 = 5!$ に気がつけば

$$
f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(x+2)^{-n} \tag{1}
$$

  という予想を思いつくのは難しいことではないであろう。

- 問題では数学的帰納法で証明せよとは要求していないが，ここでは証明しよう。

$$
f'(x) = \frac{1}{x+2} = (-1)^{1+1}(1-1)!(x+2)^{-1}
$$

  なので $n = 1$ のとき成立している。

- $n = k$ のとき成立することを仮定する。即ち

$$
f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(x+2)^{-k}
$$

  の成立を仮定する。両辺を x で微分すると

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^{k+1}(k-1)!(x+2)^{-k}\right)' \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)!(-k)(x+2)^{-k-1} \\
&= (-1)^{(k+1)+1}(k+1-1)!(x+2)^{-(k+1)}
\end{aligned}
$$

  となり，$n = k+1$ でも成立している。

- 式 (1) は $n = 0$ では成立していないことに注意すること。$n = 0$ のときは

$$
f^{(0)}(x) = f(x) = \log(x+2)
$$

  であるから $f^{(0)}(0) = \log 2$ である。

  $n \geqq 1$ のときは

$$
f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!2^{-k}
$$

  である。

- よって

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k &= f^{(0)}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k \\ &= \log 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!2^{-k}}{k!} x^k \\ &= \log 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k} x^k \end{aligned}$$

  が得られる。

- 級数は得られる場合は一意的 (一通りに決まる) であることが知られている。即ち $x = a$ における級数が 2 つあったとする。それを $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$，$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$ とすると，任意の k に対し $a_k = b_k$ である。

- この事実を用いれば導関数を求めなくても求められる場合がある。次の問題を考える。

  $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ を $x = 0$ でテーラー展開せよ。ただし $-1 < x < 1$ とする。

- x を $-1 < x < 1$ を満たす実数とする。初項 1 公比 x の等比数列の和を考えると

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

  が成立する。ここで $n \to \infty$ とすると $x^n \to 0$ なので

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \tag{2}$$

  となる。

- 次に前問を用いて次の問題を考える。

$g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ を $x = 0$ でテーラー展開せよ。

式 (2) に $-x$ を代入すると

$$\begin{aligned} g(x) = f(-x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \end{aligned} \tag{3}$$

が得られる

- 次に前問を用いて次の問題を考える。

$h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ を $x = 0$ でテーラー展開せよ。

式 (3) に x^2 を代入すると

$$h(x) = g(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

が得られる