解析学 I 演習に対する追加説明#5

- 結論を強引に導くために適当な**しかも間違った**式変形をしている人が若干います。

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{(x+y)(x^2+y^2)}{(x+y)(x-y)}$$
$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{r^3}{r^2}$$

この問題に限りませんが，式変形は正確に。というか**やってよい変形以外は禁止**と考えること。

- 最初の問題は分母の極限が 0 ではないので，特に置き換える必要はありません。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+2}{x+y-1} = \frac{0^2+0^2+2}{0+0-1} = -2$$

- (3) はどう置くかが問題です。

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^3+(y-1)^3}{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

なので「$(x,y)\to(1,1)$」と「$r\to 0$」が同じになるようにするためには，

$$x-1 = r\cos\theta, \qquad y-1 = r\sin\theta$$

と置けばよいことが分かります。

- 演習問題 2.5 は原点において

  (1) 連続でないこと

  (2) 偏微分可能であること

を示す問題です。$f(x,y)$ が $(0,0)$ で連続なら，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

が成立します。これが成立しなければ連続ではないわけです。これが収束しないことはすでに例 2.5 (2) で示してあります。

よって連続ではありません。偏微分可能かどうかは定義に基づいて計算して，収束すれば偏微分可能です。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h0}{h^2+0^2}-0\right)=0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} \\
&= \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left(\frac{0k}{0^2+k^2}-0\right)=0
\end{aligned}$$

- 引き続き演習問題 2.7 を考えます。演習問題 2.5 の関数 $f(x,y)$ が $(0,0)$ で全微分可能でないことを示せという問題です。
- 背理法で示します。関数 $f(x,y)$ が $(0,0)$ で全微分可能であると仮定します。そうすると

$$z=g(h,k)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k$$

が (a,b) における接平面になります。今 $(a,b)=(0,0)$ で，$f(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ なので

$$z=0$$

となります。

- この $g(h,k)$ が定義 2.10 の条件を満たすことを示せば全微分可能であることが示される。背理法なので条件を満たさないことが示されるが . . .
- **全微分可能**とは

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-\left(f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおくとき

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$$

となる時をいう。

- $f(0+h, 0+k) = \dfrac{hk}{h^2+k^2}$ なので

  $$\varepsilon(h,k) = \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \frac{hk}{h^2+k^2} = \frac{hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

  となる。

- 極限を計算するため

  $$h = r\cos\theta, \qquad k = r\sin\theta$$

  と極座標に変換する。このとき $(h,k) \to (0,0)$ と $r \to 0$ は同じである。

  $$\begin{aligned}\varepsilon(h,k) &= \frac{r\cos\theta r\sin\theta}{(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}} \\ &= \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^3} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\end{aligned}$$

  となるが，これは $r \to 0$ のとき収束しない。よって全微分可能でない。