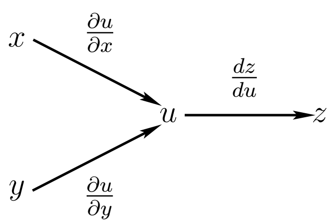
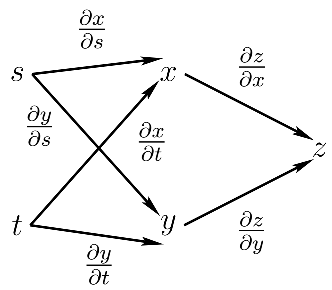
解析学 I 演習に対する追加説明#6

- 多変数関数の合成関数の微分法は 1 変数とは異なります。diagram を書いたとき，下図左のような場合は 1 変数の合成関数の導関数とほぼ同じですが，下図右の場合は異なります。





- 下図左の場合，即ち $z = f(u), u = u(x, y)$ の場合は x から z に行く道は 1 つですので，その道に沿って各部分に対応している導関数の積をつくればよいので，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}$$

となります。

- 下図右の場合，即ち $z = z(x, y), x = x(s, t), y = y(s, t)$ の場合は s から z へ行く道は 2 つあります。それぞれの道に沿って各部分に対応している導関数の積を作り，すべての道に関して足し合わせたものが合成関数の導関数になります。即ち

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

です。

- 関数が $z = z(x, y), s = s(x, y), t = t(x, y)$ と表されているとき $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めるときはもうワンステップ必要になります。適用したい式は

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

ですが，このままでは $\dfrac{\partial s}{\partial x}, \dfrac{\partial s}{\partial y}$ は求まっても，$\dfrac{\partial x}{\partial s}, \dfrac{\partial y}{\partial s}$ は求まらないからです。そこで行列型の式を用いて，$\dfrac{\partial s}{\partial x}, \dfrac{\partial s}{\partial y}$ から $\dfrac{\partial x}{\partial s}, \dfrac{\partial y}{\partial s}$ を求めます。

- 2 変数関数の組 $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ に対し

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

をこの関数（の組）の**ヤコビ行列**といい，この行列の行列式を

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \det\left(\frac{D(x,y)}{D(s,t)}\right)$$

で表わし，**ヤコビアン** (**ヤコビ行列式**) という。

- 2 つの関数の組 $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ と $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$ に対し

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\frac{D(u,v)}{D(s,t)}$$

が成立する。

- 特に逆関数に関しては

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1}$$

となる。

- 演習問題 2.15 (1) を例に考える。

$$z = x + y^2, \qquad s = x + y, \qquad t = xy$$

に対し $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよという問題である。

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$ である。

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

を適用するために $\dfrac{\partial x}{\partial s}, \dfrac{\partial y}{\partial s}$ を求める。

- $\dfrac{\partial s}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial s}{\partial y} = 1, \dfrac{\partial t}{\partial x} = y, \dfrac{\partial t}{\partial y} = x$ なので

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

となる。

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ なので

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} = \frac{D(x,y)}{D(s,t)} &= \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{x-y}\begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって $\dfrac{\partial x}{\partial s} = \dfrac{x}{x-y}, \dfrac{\partial y}{\partial s} = \dfrac{-y}{x-y}$ となる。よって

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{x-2y^2}{x-y}$$

となる。