解析学 I 演習に対する追加説明#9

- 極点を求める問題は，まず臨界点を求める必要がある。臨界点を求めるためには連立方程式を解く必要がある。一般に高次の連立方程式になるので難しい場合もある。それほど簡単でない例を考えよう。

- $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ を考える。

  臨界点は $z_x = 0$ かつ $z_y = 0$ を満たす点である。

  $$z_x = 4x^3 - 4x + 4y, \quad z_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

  なので

  $$x^3 - x + y = 0 \tag{1}$$

  $$y^3 + x - y = 0 \tag{2}$$

  を解けばよい。

- 式 (1) も式 (2) も単独では因数分解される式ではない。2 つを組み合わせて式を作る。

- 式 (1) と式 (2) を加えると左辺は

  $$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

  なので

  $$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \tag{3}$$

  を得る。

- 式達の同値性に注意すること。

  $$\text{式 (1)} + \text{式 (2)} \implies \text{式 (3)}$$

  であるが

  $$\text{式 (3)} \implies \text{式 (1)} + \text{式 (2)}$$

  ではない。同値なのは

  $$\text{式 (1)} + \text{式 (2)} \iff \text{式 (1)} + \text{式 (3)}$$

  または

  $$\text{式 (1)} + \text{式 (2)} \iff \text{式 (2)} + \text{式 (3)}$$

  である。

- 式 (3) は $(x+y)(x^2-xy+y^2)=0$ なので

$$x+y=0 \tag{4}$$
$$x^2-xy+y^2=0 \tag{5}$$

とおくと

$$\text{式 (3)} \iff \text{式 (4)} \quad \text{または} \quad \text{式 (5)}$$

が成立する。

よって

$$\begin{aligned}\text{式 (1)} + \text{式 (3)} \iff & \text{式 (1)} + \text{式 (4)} \quad \text{または} \\ & \text{式 (1)} + \text{式 (5)}\end{aligned}$$

成立する。

- 最初に 式 (1) + 式 (4) の場合を考える。式 (4) から $y=-x$ なので，これを式 (1) に代入する。

$$\begin{aligned}x^3-x-x=x^3-2x&=x(x^2-2)\\&=x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=\sqrt{2}$ または $x=-\sqrt{2}$ となる。よって

$$(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

となる。

- 次に 式 (1) + 式 (5) の場合を考える。$x^2-xy+y^2=0$ より

$$x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2=0$$

より $x-\dfrac{1}{2}y=0, y=0$ を得る。よって $(x,y)=(0,0)$ である。

- 以上により臨界点は

$$(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

である。

- 次にヘッシャンを計算する。

$$z_{xx} = 12x^2 - 4, \quad z_{xy} = 4, \quad z_{yy} = 12y^2 - 4$$

なので

$$H(x, y) = 16(3x^2 - 1)(3y^2 - 1) - 16$$

となる。よって

$$H(0, 0) = 0, \quad H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 384 > 0$$

となる。$z_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = z_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$ なので $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ は極小点である。

- $(x, y) = (0, 0)$ はこれだけではよく分からない。前にやった例題では最初から x-軸上等を決めて考えたが，少し一般的な方法で考えよう。

そのために極限のときと同じように極座標に変換してみる

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

とおく。

一般に臨界点が (a, b) のときは

$$x - a = r\cos\theta, \qquad y - b = r\sin\theta$$

とおく。

- z に $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を代入すると

$$\begin{aligned} &r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - 2r^2(\cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \sin^e\theta) \\ &\qquad = r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - 2r^2(1 - 2\cos\theta\sin\theta) \qquad (6) \end{aligned}$$

極座標は $r \geqq 0$ なので，0 の近くで $r > 0$ のときの正負を見ればよい。常に正なら極小点，常に負なら極大点，θ の値により正になったり，負になったりすれば極点ではない。

- r^2 の係数が 0 になるように θ を選ぶことができる。$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ とおけばよい。

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ を式 (6) に代入すると

$$\frac{1}{2}r^4 \qquad (7)$$

となる。これは $r > 0$ のとき正である。

- $\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ とおくと $\cos\theta\dfrac{3}{4}\pi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta\dfrac{3}{4}\pi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ なので式 (6) に代入すると

  $$\frac{1}{2}r^4 - 4r^2$$

  となる。これは 0 の近くで $r > 0$ のとき負になる。

  以上により $(0,0)$ は極点でないことが分かる。

- 今まで述べてきたことから $(x,y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ および $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で極小点であり，極点はこの 2 つしかないことが分かる。