解析学 I 演習に対する追加説明#10

- 最大値問題に対する応用の例題を考えよう。
- 「**定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。**」という問題を考える。
- このような問題の場合変数として何をとるかが問題になる。この例の場合「角度」をとるか「長さ」をとるか 2 通りの取り方が考えられる。この例では三角形は円に内接しているので角度を変数にとることにする。
- 定円を点 O を中心とする半径 r の円とする。円に内接する 3 角形を ABC とする。角 $\angle AOB = s, \angle BOC = t, \angle COA = u$ とおくと $s + t + u = 2\pi$ が成立している。
- 最大面積を求めるので，ABC は O を含んでいるとしてよい。すなわち角度 s, t, u は π より小さいとしてよい。
- このとき ABC が 3 角形をなす条件は $0 < s < \pi, 0 < t < \pi, 0 < u < \pi$ である。この不等式が定義する領域を D とすると $D = \{\,(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s < \pi, t < \pi, s + t > \pi\}$ となる。
- 3 角形 ABC の面積 S は
$$S = \frac{1}{2}r^2\left(\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t)\right)$$
である。
- そこで D 上で S の最大値を求める問題になるが，前にも述べたように，これでは最大値が存在するという保証が得られない。
- なので，$\overline{D} = \{\,(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \leqq \pi, t \leqq \pi, s + t \geqq \pi\}$ とおき，$\overline{D}$ 上で
$$z = f(s,t) = \frac{1}{2}r^2\left(\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t)\right)$$
の最大値を求める問題を考える。

- $\overline{D}$ は有界閉集合であり，$f(s,t)$ は $\overline{D}$ 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。内部の点の場合最大値を与える点は臨界点である。

- 最初に境界上での関数の値を考える。

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{\, (s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s = \pi, 0 \leqq t \leqq \pi \,\} \\
L_2 &= \{\, (s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq s \leqq \pi, t = \pi \,\} \\
L_3 &= \{\, (s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq s \leqq \pi, s + t = \pi \,\}
\end{aligned}
$$

とおくと $\partial\overline{D} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ である。L_1 上で z は

$$
\begin{aligned}
z = f(\pi,t) &= \frac{1}{2}r^2 \left(\sin\pi + \sin t + \sin(2\pi - \pi - t)\right) \\
&= \frac{1}{2}r^2 \left(\sin t + \sin(\pi - t)\right) \\
&= \frac{1}{2}r^2 \left(\sin t + \sin t\right) = r^2 \sin t
\end{aligned}
$$

となるので，L_1 上で最大になるのは $(s,t) = \left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$ のときで値は $f\left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right) = r^2$ である。L_2 上では

$$
z = f(s,\pi) = r^2 \sin s
$$

となるので，L_2 上で最大になるのは $(s,t) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ のときで値は $f\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) = r^2$ である。L_3 上では $t = \pi - s$ なので

$$
\begin{aligned}
z = f(s,\pi - s) &= \frac{1}{2}r^2 \left(\sin s + \sin\left(\pi - s\right) + \sin(2\pi - \pi)\right) \\
&= \frac{1}{2}r^2 \left(\sin s + \sin(\pi - s)\right) \\
&= \frac{1}{2}r^2 \left(\sin s + \sin s\right) = r^2 \sin s
\end{aligned}
$$

となる。L_3 上で最大になるのは $(s,t) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ のときで値は $f\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) = r^2$ である。以上により境界上での最大値は r^2 で $(s,t) = \left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ でとることが分かる。

- 次に内部の臨界点を調べる。

$$z_s = \frac{1}{2}r^2 \left(\cos s - \cos(2\pi - s - t)\right)$$
$$z_t = \frac{1}{2}r^2 \left(\cos t - \cos(2\pi - s - t)\right)$$

  なので臨界点では

$$\cos s - \cos(2\pi - s - t) = 0$$
$$\cos t - \cos(2\pi - s - t) = 0$$

  が成立している。これより $\cos s = \cos t$ が得られる。

  $y = \cos x$ は $0 \leqq x \leqq \pi$ で単射である。$0 \leqq s \leqq \pi$ かつ $0 \leqq t \leqq \pi$ より $s = t$ が成立する。$t = s$ を代入して $\cos s = \cos(2\pi - 2s)$ を得る。

  $\pi \leqq s + t \leqq 2\pi$ より，$\pi \leqq 2s \leqq 2\pi$ が成立している。$-2\pi \leqq -2s \leqq -\pi$，$0 \leqq 2\pi - 2s \leqq \pi$ と変形できる。

  よって前と同様に $s = 2\pi - 2s$ が成立する。$s = \dfrac{2\pi}{3}$ が得られる。また $t = s$ なので $t = \dfrac{2\pi}{3}$ である。

  よって臨界点は $(s, t) = \left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ である。

- 有界閉集合上で定義された連続関数は最大値をとるので，$\overline{D}$ 上の $z = f(s, t)$ に最大値が存在する。

- 最大値をとるのは内部の臨界点か境界上の点なので，内部の臨界点の値と境界の最大値を比較する。

$$f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 > r^2 = f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

  なので臨界点の方が大きい。

- よって f は $(s, t) = \left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ で最大値をとる。

- $s = t = u = \dfrac{2\pi}{3}$ なので最大になる 3 角形は正 3 角形である。