解析学 I 演習に対する追加説明#11

- 有理関数の積分のために用いられる部分分数展開について追加説明をする。

- 部分分数展開とは有理式 $\dfrac{g(x)}{f_1(x)f_2(x)}$ を

$$\frac{g(x)}{f_1(x)f_2(x)} = \frac{g_1(x)}{f_1(x)} + \frac{g_2(x)}{f_2(x)}$$

  の形に変形することである。

- 部分分数展開ができるためには $f_1(x)$ と $f_2(x)$ には**共通因子があってはならない**。

  例えば $\dfrac{g(x)}{(x+1)^2} = \dfrac{g_1(x)}{x+1} + \dfrac{g_2(x)}{x+1}$ と変形することはできない。

- 分子の次数を分母より小さくとるのは，その条件をつけないと

$$\frac{g(x)}{f_1(x)f_2(x)} = \frac{g_1(x)}{f_1(x)} + \frac{g_2(x)}{f_2(x)}$$

  と変形したとき $g_1(x), g_2(x)$ は一意的 (一通り) に決まらないからである。部分分数展開する前には**分子の次数を分母より必ず小さくしておく**ことが必要である。

- 部分分数展開をするときは前述の 2 つの条件が満たされているかを**必ずチェックする**こと。

- $I = \displaystyle\int \frac{2x^2-4x+1}{x(x-1)^2}\,dx$ を考える。x は 1 次式で $(x-1)^2$ は 2 次式なので，それぞれの分子は 0 次式と 1 次式 (1 次の項が 0 の場合もあるので正確には 1 次以下) なので

$$\frac{2x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(x-1)^2} \tag{1}$$

  と部分分数展開できることが知られている。あとは係数 a, b, c を決定すればよい。

- 係数 a, b, c を決定する方法としてここでは，微分も使う代入法を紹介する。式 (1) を通分すると

$$\frac{2x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2+x(bx+c)}{x(x-1)^2}$$

となるので

$$g(x) = 2x^2-4x+1 = a(x-1)^2+x(bx+c) \tag{2}$$

が恒等的に成立している。代入する値として $x = 0$ および $x = 1$ にすぐ気がつくが，これでは式は 2 つでまだ足りない。そこで式 (2) を微分した式を考える。

- 式 (2) に $x = 0$ を代入することにより

$$a(0-1)^2+0(b0+c) = g(0) = 1$$

より $a = 1$ が得られる。

$x = 1$ を代入することにより

$$b+c = a(1-1)^2+1(b1+c) = g(1) = -1 \tag{3}$$

- $g'(x) = 4x-4 = 2a(x-1)+(bx+c)+bx$ に $x = 1$ を代入することにより

$$2b+c = 2a(1-1)+(b+c)+b = g'(1) = 0 \tag{4}$$

が得られる。式 (3) と式 (4) より $b = 1, c = -2$ となる。

- 以上により

$$\frac{2x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

が得られる。

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$ となるので，$\displaystyle\int \frac{x-2}{(x-1)^2}\,dx$ を求めればよい。

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{(x-1)^2} &= \frac{(x-1)-1}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

と展開する方法が通常行われる方法であるが，ここでは分母の定数項を 0 に直す方法で解く。

- 分母が $(x-1)^2$ なので $t=x-1$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=1$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{(x-1)^2}\,dx &= \int \frac{t-1}{t^2}\,dt = \int \left\{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right\} dt \\ &= \log|t| + \frac{1}{t} = \log|x-1| + \frac{1}{x-1}\end{aligned}$$

  となる。

- 以上により

$$I = \int \frac{2x^2-4x+1}{x(x-1)^2}\,dx = \log|x| + \log|x-1| + \frac{1}{x-1}$$