解析学 I 演習に対する追加説明#12

- もう一度有理関数の積分が知られた関数 (初等関数) で表されることについて (理論的に) 説明する。

- 最初に分子の次数が分母の次数以上であれば，分子の次数の方が小さい有理式と多項式との和の形に変形しておく。以下有理式は分子の次数が分母より小さいとする。

- 部分分数展開をするために分母を因数分解する。有理式を $Q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ とする。分母の多項式 $g(x)$ が $g(x) = g_1(x)g_2(x)$ と因数分解されたとする。ただし $g_1(x)$ と $g_2(x)$ に共通因子はないとする。このとき

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

  と部分分数展開できることが知られている。

- 多項式は実数の範囲で 1 次式または 2 次式の積に因数分解することが知られているので，部分分数展開を可能な限り実行していくと次の形の関数の和に変形できる。

$$\frac{f_1(x)}{(x+a)^n}, \qquad \frac{f_2(x)}{(x^2+ax+b)^n}$$

- $\dfrac{f_1(x)}{(x+a)^n}$ の場合は $t = x + a$ と置くと

$$\int \frac{f_1(x)}{(x+a)^n}\,dx = \int \frac{f(t-a)}{t^n}\,dt$$

  とできる。$f(t-a) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1}$ と置くと

$$= \int \frac{a_0}{t^n}\,dt + \int \frac{a_1}{t^{n-1}}\,dt + \cdots + \int \frac{a_{n-1}}{t}\,dt$$

  となりこの場合は積分が求まる。

- $\dfrac{f_2(x)}{(x^2+ax+b)^n}$ の場合は分母の 2 次式の 1 次の項を消すように変形する。$x^2+ax+b = x^2+2x\dfrac{a}{2}+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+b = \left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+b-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ と完全平方に変形できるので，$t=x+\dfrac{a}{2}$ と置くと

$$\int \frac{f_2(x)}{(x^2+ax+b)^n}\,dx = \int \frac{f_2\left(t-\dfrac{a}{2}\right)}{\left(t^2+b-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\right)^n}\,dt$$

と変形できる。x^2+ax+b は実数の範囲で因数分解できないので $b-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2>0$ である。$c=\sqrt{b-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$ とおくと分母は $(t^2+c^2)^n$ と書ける。

- $f_2\left(t-\dfrac{a}{2}\right)$ は t の多項式なので，t^2+c^2 で割り算を可能な限り実行すると

$$\begin{aligned} f_2\left(t-\frac{a}{2}\right) =& a_0+b_0t+(a_1+b_1t)(t^2+c^2)+(a_2+b_2t)(t^2+c^2)^2+\cdots+ \\ & (a_{n-1}+b_{n-1}t)(t^2+c^2)^{n-1} \end{aligned}$$

と表示できるので

$$\begin{aligned} \int \frac{f_2(x)}{(x^2+ax+b)^n}\,dx =& \int \frac{a_0+b_0t}{(t^2+c^2)^n}\,dt+\int \frac{a_1+b_1t}{(t^2+c^2)^{n-1}}\,dt+\cdots+ \\ & \int \frac{a_{n-1}+b_{n-1}t}{(t^2+c^2)}\,dt \end{aligned}$$

が得られる。

- よって $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+c^2)^k}\,dt$ および $\displaystyle\int \frac{t}{(t^2+c^2)^k}\,dt$ の積分が求まれば証明が完了する。

- 後者については $u=t^2+c^2$ とおくと $\dfrac{du}{dt}=2t$ なので

$$\int \frac{t}{(t^2+c^2)^k}\,dt = \int \frac{t}{u^k}\frac{1}{2t}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^k}\,du$$

なので積分が求まる。

- 前者については，$t = cu$ と置くと，$\dfrac{dt}{du} = c$ なので

$$\int \frac{1}{(t^2+c^2)^k}\,dt = \int \frac{c}{(c^2u^2+c^2)^k}\,du = \frac{1}{c^{2k-1}}\int \frac{1}{(u^2+1)^k}\,du$$

となる。よって $J_k = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,dx$ とおくとき，J_k が求まればよい。

- $k = 1$ のときは，$(\arctan x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ なので

$$J_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$$

となる。

- 次に $k = 2$ を考える。

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

より

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

即ち

$$J_1 = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx + J_2 \tag{1}$$

となるので，$\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$ が求まればよい。$f'(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ となる $f(x)$ が求まれば，部分積分法で

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int x f'(x)\,dx = x f(x) - \int f(x)\,dx \tag{2}$$

と計算できる。

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

なので $t = x^2+1$ と置くと $\dfrac{dt}{dx} = 2x$ より

$$f(x) = \int \frac{x}{t^2}\frac{1}{2x}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{2t} = -\frac{1}{2(x^2+1)}$$

を得る。これを (2) に代入すると

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$= -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}J_1$$

が得られる。これを (1) に代入すると

$$J_1 = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}J_1 + J_2$$

より

$$J_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}J_1$$

- $k > 2$ の場合も同様に

$$\frac{1}{(x^2+1)^k} = \frac{(x^2+1)}{(x^2+1)^{k+1}} = \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}} + \frac{1}{(x^2+1)^{k+1}}$$

より

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,dx = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx$$

即ち

$$J_k = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx + J_{k+1} \tag{3}$$

となるので，$\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx$ が求まればよい。$f'(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^{k+1}}$ となる $f(x)$ が求まれば，部分積分法で

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx = \int x f'(x)\,dx = x f(x) - \int f(x)\,dx \tag{4}$$

と計算できる。

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx$$

なので $t = x^2+1$ と置くと $\dfrac{dt}{dx} = 2x$ より

$$f(x) = \int \frac{x}{t^{k+1}}\frac{1}{2x}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^{k+1}}\,dt = -\frac{1}{2kt^k} = -\frac{1}{2k(x^2+1)^k}$$

を得る。これを (4) に代入すると

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx = -\frac{x}{2k(x^2+1)^k} + \frac{1}{2k}\int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,dx$$
$$= -\frac{x}{2k(x^2+1)^k} + \frac{1}{2k}J_k$$

が得られる。これを (3) に代入すると

$$J_k = -\frac{x}{2k(x^2+1)^k} + \frac{1}{2k}J_k + J_{k+1}$$

より

$$J_{k+1} = \frac{x}{2k(x^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k}J_k$$