解析学 I 演習に対する追加説明#13

- しつこいかもしれないが，有理関数の積分について説明する。今回は実際的に計算を実行する。

- $f(x) = -x^4 + x^3 - 19x^2 + 10x - 91$，$g(x) = x^5 - x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 81x - 81$ とし，有理式を $Q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ とする。
$$I = \int Q(x)\, dx$$
を求めよう。

- $g(x)$ を因数分解する。慣れている人は
$$g(x) = x^5 - x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 81x - 81$$
を見た瞬間に因数 (因式と呼ぶべきか) が分かるだろう。分からない人は適当な a を代入して $g(a)$ を計算し，$g(a) = 0$ となる a を求める。

- $x = 1$ を $g(x)$ に代入すると
$$g(1) = 1^5 - 1^4 + 18 \cdot 1^3 - 18 \cdot 1^2 + 81 \cdot 1 - 81 = 0$$
なので $g(x)$ は $x - 1$ で割り切れる。割り算を実行すると
$$\begin{aligned} g(x) &= x^4(x-1) + 18x^2(x-1) + 81(x-1) \\ &= (x-1)(x^4 + 18x^2 + 81) = (x-1)(x^4 + 2 \cdot 9x + 9^2) \\ &= (x-1)(x^2+9)^2 \end{aligned}$$
が得られる。

- 次は部分分数展開を実行する。
$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{-x^4 + x^3 - 19x^2 + 10x - 91}{(x-1)(x^2+9)^2} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{f_1(x)}{(x^2+9)^2} \qquad (1) \end{aligned}$$
と変形できることが知られている。ここで $f_1(x)$ は 3 次式 (以下) である。$A, f_1(x)$ を決定すれば部分分数展開される。係数比較法でもできるが，計算が面倒な場合もある。ここでは代入法で求める。

- 式 (1) を通分して分子を比較すると

$$-x^4 + x^3 - 19x^2 + 10x - 91 = A(x^2+9)^2 + f_1(x)(x-1) \quad (2)$$

  が得られる。

- 式 (2) に $x = 1$ を代入すると右辺の第 2 項は 0 になる。

$$\begin{gathered} -1^4 + 1^3 - 19 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 91 = A(1^2+9)^2 + f_1(1)(1-1) \\ -100 = 100A \end{gathered}$$

  より $A = -1$ を得る。

- $A = -1$ を式 (1) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{f_1(x)}{(x^2+9)^2} &= Q(x) + \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{-x^4 + x^3 - 19x^2 + 10x - 91}{(x-1)(x^2+9)^2} + \frac{(x^2+9)^2}{(x-1)(x^2+9)^2} \\ &= \frac{x^3 - x^2 + 10x - 10}{(x-1)(x^2+9)^2} = \frac{x^2(x-1) + 10(x-1)}{(x-1)(x^2+9)^2} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+10)}{(x-1)(x^2+9)^2} = \frac{x^2+10}{(x^2+9)^2} = \frac{x^2+9+1}{(x^2+9)^2} \\ &= \frac{x^2+9}{(x^2+9)^2} + \frac{1}{(x^2+9)^2} \\ &= \frac{1}{x^2+9} + \frac{1}{(x^2+9)^2} \end{aligned}$$

  となる。

- 積分すると

$$\int Q(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2+9}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

  となる。

- 3 番目の積分は

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \log|x-1|$$

  となる。

- 1 番目の積分は

  $$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$$

  に帰着する方法や置換積分で直接計算する方法がある。ここでは両方紹介する。

- $x = 3t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = 3$ なので

  $$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+9}\,dx &= \int \frac{3}{9t^2+9}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\arctan t = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\end{aligned}$$

  となる。

- $x = 3\tan t$ とおくと，

  $$\frac{1}{3}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$$

  であり，

  $$x^3 + 9 = 9\tan^2 t + 9 = 9(1+\tan^2 t)$$

  なので

  $$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+9}\,dx &= \int \frac{3(1+\tan^2 t)}{9(1+\tan^2 t)}\,dt = \frac{1}{3}\int dt \\ &= \frac{1}{3}t = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\end{aligned}$$

- 2 番目の積分は t^2+1 に変形してから漸化式を求めてもよいが，直接計算してもよい。ここでは直接計算しよう。

- $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx$，$I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$ とおくとき，I_1 と I_2 の関係を求める。

  $$\frac{1}{x^2+9} = \frac{x^2+9}{(x^2+9)^2} = \frac{x^2}{(x^2+9)^2} + \frac{9}{(x^2+9)^2}$$

  より

  $$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx + \int \frac{9}{(x^2+9)^2}\,dx$$

即ち

$$I_1 = \int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx + 9I_2 \tag{3}$$

となるので，$\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx$ が求まればよい。$f'(x) = \dfrac{x}{(x^2+9)^2}$ となる $f(x)$ が求まれば，部分積分法で

$$\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = \int xf'(x)\,dx = xf(x) - \int f(x)\,dx \tag{4}$$

と計算できる。

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{x}{(x^2+9)^2}\,dx$$

なので $t = x^2+9$ と置くと $\dfrac{dt}{dx} = 2x$ より

$$f(x) = \int \frac{x}{t^2}\frac{1}{2x}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{2t} = -\frac{1}{2(x^2+9)}$$

を得る。これを (4) に代入すると

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx &= -\frac{x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+9}\,dx \\ &= -\frac{x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{2}I_1\end{aligned}$$

が得られる。これを (3) に代入すると

$$I_1 = -\frac{x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{2}I_1 + 9I_2$$

より

$$I_2 = \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}I_1$$

- 以上をあわせると

$$\begin{aligned}\int Q(x)\,dx &= \int \frac{1}{x^2+9}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= I_1 + I_2 - \log|x-1| \\ &= I_1 + \frac{x}{18(x^2+1)} + \frac{1}{18}I_1 - \log|x-1| \\ &= \frac{x}{18(x^2+1)} + \frac{19}{54}\arctan\frac{x}{3} - \log|x-1|\end{aligned}$$