解析学 I 演習に対する追加説明#15

- 次の状況で微分方程式を立てて解くことを実行しよう。
- 空気中を落下する物体に働く空気の抵抗は速度の 2 乗に比例する。比例定数を k，重力定数を g とする。速度を v とするとき v が満たすべき微分方程式を求めよ。
- 運動方程式は力を F 加速度を a 質量を m としたとき

$$F = ma$$

であった。下向きを正の方向にとると働く力は重力と空気の抵抗力なので，$F = mg - kv^2$ となる。よって求める微分方程式は

$$mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt}$$

である。

- この微分方程式を解く。

$mg - kv^2 = m\dfrac{dv}{dt}$ より $\dfrac{1}{g - \dfrac{k}{m}v^2}dv = dt$ となり，

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{\dfrac{k}{m}}v} + \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{\dfrac{k}{m}}v}\right)dv = dt$$

と変形して積分すると，

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\sqrt{\frac{m}{k}}\log\left(\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}}v\right) - \sqrt{\frac{m}{k}}\log\left|\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}v\right|\right) = t + C_1$$

を得る。初期値を $v = 0$ と考えると $\sqrt{g} - \sqrt{\dfrac{k}{m}}v > 0$ と仮定できるので，絶対値をはずして変形すると，

$$\log\left(\frac{\sqrt{g} + \sqrt{\dfrac{k}{m}}v}{\sqrt{g} - \sqrt{\dfrac{k}{m}}v}\right) = 2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{m}}(t + C_1)$$

となるので，

$$\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\frac{k}{m}}v}{\sqrt{g}-\sqrt{\frac{k}{m}}v} = \exp\left(2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{m}}(t+C_1)\right)$$

となる。よって

$$v = \sqrt{g}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\exp\left(2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{m}}(t+C_1)\right)-1}{\exp\left(2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{m}}(t+C_1)\right)+1}$$

を得る。

- $t \to \infty$ としたとき $v \to \sqrt{g}\sqrt{\frac{m}{k}}$ となる。よってこの条件下では落下速度は $\sqrt{g}\sqrt{\frac{m}{k}}$ を超えない。
- 最後に述べた事実は微分方程式を解かなくても微分方程式

$$mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt}$$

  から次の様に導出できる。
- $t = 0$ のとき落下を始めたと考えると $v(0) = 0$ となっている。よって最初は $F = mg - kv^2 > 0$ となっている。このとき $\frac{dv}{dt} > 0$ である。よって v は増加している。
- v が増加すると $F = mg - kv^2$ は減少する。しかし $F < 0$ となることはない。何故かというと，もし $F < 0$ になると力は上向きに働く。$-kv^2$ の項は動くことへの抵抗力であり，抵抗力が元の力を超えることはない。よって $v \leqq \sqrt{\frac{mg}{k}}$ が成立する。
- v は増加していき，ある値 $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ 以下なので $\lim_{t\to\infty} v(t)$ は収束する。

- $\lim_{t\to\infty} v(t) = v_0 < \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$ とすると

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \geqq mg - kv_0^2$$

  となるので

$$v \geqq \frac{1}{m}\left(mg - kv_0^2\right)t$$

  となり $\lim_{t\to\infty} v(t) = \infty$ となり矛盾。

- よって $v_0 = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$ となる。