解析学 I 演習に対する追加説明#16

- 演算子法について例題を解きながら説明する。
- 微分方程式 $y' + y\sin x = 0$ を演算子法で解く。
- 微分演算子 D を用いて微分方程式を書き直すと

$$(D + \sin x)y = 0 \tag{1}$$

  となる。
- ここで演算子法の基本事項である。

$$D - p(x) = e^{P(x)} D e^{-P(x)}$$

  を使用する。ただし $P(x) = \displaystyle\int p(x)\,dx$ である。
- $p(x) = -\sin x$ とおくと，

$$\begin{aligned} P(x) &= \int (-\sin x)\,dx = -\int \sin x\,dx \\ &= \cos x \end{aligned}$$

  となる。一般には $P(x) = \cos x + C$ となるが，$C = 0$ としてよい理由は後で述べる。
- 前項のことにより

$$D - (-\sin x) = e^{\cos x} D e^{-\cos x}$$

  と変形できるので (1) は

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} y = 0 \tag{2}$$

  となる。
- $z = e^{-\cos x} y$ とおき，(2) の両辺に $e^{-\cos x}$ をかけると

$$Dz = 0 \tag{3}$$

  を得る。

- (3) を積分すると

$$z = C \tag{4}$$

となる。

- $z = e^{-\cos x} y$ より $C = e^{-\cos x} y$ となり

$$y = Ce^{\cos x}$$

が得られる。

- ここで $P(x) = \cos x$ としてもよい理由を述べておく。

一般には $P(x) = \displaystyle\int -\sin x\, dx = \cos x + C$ となる。これを演算子法の基本事項に代入すると

$$\begin{aligned} D - (-\sin x) &= e^{\cos x + C} D e^{-(\cos x + C)} \\ &= e^{\cos x} e^{C} D e^{-\cos x} e^{-C} \end{aligned}$$

となるが定数 (演算子)e^{-C} は微分演算子や関数演算子と可換なので

$$\begin{aligned} &= e^{\cos x} e^{C} D e^{-C} e^{-\cos x} \\ &= e^{\cos x} e^{C} e^{-C} D e^{-\cos x} \\ &= e^{\cos x} 1 D e^{-\cos x} \\ &= e^{\cos x} D e^{-\cos x} \end{aligned}$$

となる。これは $P(x) = \cos x$ として計算した式と同じである。

- 次に 2 階の微分方程式 $y'' - 5y' + 6y = 0$ を考える。

- 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0 \tag{5}$$

と書き直すことができる。

- 2 次式 $t^2 - 5t + 6$ は

$$t^2 - 5t + 6 = (t-3)(t-2)$$

と因数分解できる。

- 定数演算子は微分演算子と可換なので,

$$
\begin{aligned}
(D-3)(D-2) &= (D-3)D-(D-3)2 = D^2-3D-D2+6 \\
&= D^2-3D-2D+6 = D^2-5D+6
\end{aligned}
$$

となるので微分方程式は

$$(D-3)(D-2)y=0 \tag{6}$$

となる。

- $u=(D-2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は

$$(D-3)u=0 \tag{7}$$

となる。式 (7) は 1 階の微分方程式であることに注意しよう。2 階の微分方程式を解くことを，1 階の微分方程式を 2 度解く問題に変形している。

- 演算子の基本事項

$$e^{3x}De^{-3x}=D-3$$

が成立するので，微分方程式 (7) は

$$e^{3x}De^{-3x}u=0$$

となる。

- $v=e^{-3x}u$ とおき，両辺に左から e^{-3x} をかけると微分方程式は

$$Dv=0$$

となる。

- 両辺を積分すると $v=C_1$ となるので

$$u=C_1e^{3x}$$

である。

- $u=(D-2)y$ に代入すると y についての微分方程式

$$(D-2)y=C_1e^{3x} \tag{8}$$

が得られる。

- 演算子の基本事項
  $$e^{2x}De^{-2x} = D - 2$$
  をもう一度使用すると微分方程式 (8) は
  $$e^{2x}De^{-2x}y = C_1e^{3x}$$
  となる。
- $z = e^{-2x}y$ とおき両辺に左から e^{-2x} をかけると
  $$Dz = C_1e^x$$
  となる。両辺を積分すると
  $$z = C_1e^x + C_2$$
  となるので一般解は
  $$y = e^{2x}z = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$$
  となる。
- もう一度書くが，1 階の微分方程式 (7) と (8) を解くことで，2 階の微分方程式 (5) を解いている。