解析学I演習に対する追加説明#17

- 複素数値関数で与えられている一般解を実数値関数の一般解に直す別の方法を紹介する。

- 微分方程式 $y'' + y' + y = 0$ を演算子法で解く。複素数値関数でよければ実数解をもつ場合と同様にできる。

- 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + D + 1)y = 0 \tag{1}$$

と書き直すことができる。

- 2 次方程式 $t^2+t+1 = 0$ の解は $\lambda_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ なので

$$t^2 + t + 1 = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$$

と因数分解できる。

- 定数演算子は微分演算子と可換なので,

$$\begin{aligned}(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) &= (D - \lambda_1)D - (D - \lambda_1)\lambda_2 = D^2 - \lambda_1 D - D\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 \\ &= D^2 - \lambda_1 D - \lambda_2 D + \lambda_1\lambda_2 = D^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)D + \lambda_1\lambda_2 \\ &= D^2 + D + 1\end{aligned}$$

となるので微分方程式は

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = 0 \tag{2}$$

となる。

- $u = (D - \lambda_2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は

$$(D - \lambda_1)u = 0 \tag{3}$$

となる。

- 演算子の基本事項

$$e^{\lambda_1 x} D e^{-\lambda_1 x} = D - \lambda_1$$

が成立するので，微分方程式 (3) は

$$e^{\lambda_1 x} D e^{-\lambda_1 x} u = 0$$

となる。

- $v = e^{-\lambda_1 x} u$ とおき，両辺に左から $e^{-\lambda_1 x}$ をかけると微分方程式は

  $$Dv = 0$$

  となる。

- 両辺を積分すると $v = C_1$ となるので

  $$u = C_1 e^{\lambda_1 x}$$

  である。

- $u = (D - \lambda_2)y$ に代入すると y についての微分方程式

  $$(D - \lambda_2)y = C_1 e^{\lambda_1 x} \tag{4}$$

  が得られる。

- 演算子の基本事項

  $$e^{\lambda_2 x} D e^{-\lambda_2 x} = D - \lambda_2$$

  をもう一度使用すると微分方程式 (4) は

  $$e^{\lambda_2 x} D e^{-\lambda_2 x} y = C_1 e^{\lambda_1 x}$$

  となる。

- $z = e^{-\lambda_2 x} y$ とおき両辺に左から $e^{-\lambda_2 x}$ をかけると

  $$Dz = C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$$

  となる。両辺を積分すると

  $$z = \frac{C_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{x} + C_2$$

  となるの。$\dfrac{C_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$ を C_1 とおきなおすと一般解は

  $$y = e^{\lambda_2 x} z = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

  となる。

- 実数値関数の一般解が必要なときはこの表示では十分でない。そこでオイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

を用いて変形する。

- オイラーの公式より

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 x} &= \exp\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\exp\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ e^{\lambda_2 x} &= \exp\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\exp\left(-i\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} y =& C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \\ =& C_1 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &+ C_2 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ =& (C_1 + C_2)\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + (C_1 i - C_2 i)\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \end{aligned}$$

$B_1 = C_1 + C_2, B_2 = C_1 i - C_2 i$ とおくと

$$=B_1 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B_2 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

が得られる。