解析学 I 要綱 #1

0 Introduction

テキストより理論的に深い事を知りたい人には参考書として次をあげておく。

高木貞治『解析概論』(岩波書店)
小平邦彦『解析入門』(岩波書店)

微積分は自然科学などを通して，大きな役割を果たしてきたし，現在も果している。1 年後期 (解析学 I)，2 年前期 (解析学 II) にわたってその微積分学を学習して行く。

現代社会と技術は切っても切り離すことができないが，その技術を下支えしているのが微積分である。朝起きて天気予報を見たとする。現在の天気予報は微分方程式の近似計算をコンピュータで行うことにより予報をしている。歩いて大学に来る途中 GPS で自分の位置を確認したとする。GPS のための静止衛星を打ち上げるときは，運動方程式に基づく微分方程式を解いて (近似計算をして) ロケットを打ち上げている。このプロジェクターを動かしている電気の理解にも微積分が必要になる。直流電流なら，微積分なしでもすますことができるかもしれないが，交流理論の理解は微積分なしには難しいであろう。

理工系の学生にとっての微積分の役割は明らかであろうが，一言ふれておく。近代科学の父とも言われるガリレオ・ガリレイ (1564–1642) は「偽金鑑識官」の中で

> 自然という書物は数学という言葉で書かれている。自然を学ぶためには数学を学ぶ必要がある

と書いている。理工系，特に工学系の学生はとっては例えばスパナを道具として自在に扱えるように，数学も自在に道具として扱えることが技術者としての力量を深いものするといえる。

微積分は高校でも学び，前期も数学序論で扱った。そうなるとこの授業は，復習をする，ないしは応用的なことをするということなのであろうか。実はそうではない。前期の序論では意識的に高校数学との違いを強調してこなかったが，理論も含めてきちんと議論をしようとすると 2 つの点で違いが明らかになる。1 つは，扱う関数として**多変数関数** (独立変数が 2 つ以上ある関数) が登場すること

である。解析学 I では 2 章で多変数関数の微分を扱うし，解析学 II では多変数関数の積分が登場する。

2 つ目は質的側面 (理論構成の厳密さ) である。後者については少し説明が必要だと思われる。微積分の歴史にもふれながら，それを説明して全体の講義のイントロにしたい。

微積分学は 17 世紀の後半にニュートン (1642–1727) とライプニッツ (1646–1716) によって独立に始められた。先主権争いなどもあったが今では独立に (お互に相手の仕事を知らないで) 考えたとされている。微積分の源流は 2 つあり，1 つは古代ギリシア以来の『求積法』(面積・体積などを求める方法)，もう 1 つは近代になって考えられ始めた方法でここでは『接線法』と呼んでおこう。ニュートン，ライプニッツ以前にはこの 2 つは別のもので関連するとは考えられていなかった。ニュートン，ライプニッツがこれらの間の関連を見つけたことが微積分学を成立させたと言ってよいだろう。

求積法も接線法も，所謂「無限概念」に関係するもので，その当時から，色々な批判があった。それは，その当時のヨーロッパ人が数学の理想と考えた古代ギリシアの厳密な取り扱いに比べて，曖昧に感じられたのであろう。ここでは極限概念に対するバークレイ (1685–1753) の批判を紹介する。

$y = f(x) = x^2$ の導関数を求めてみよう。導関数の定義に従って計算すると次の様になる。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x
\end{aligned}
$$

よって $y = f(x) = x^2$ の導関数は $y = f'(x) = 2x$ となる。

これに対するバークレイの批判は以下の様である：

> 数 (実数) は 0 であるかないかのいずれかである。だから h も 0 であるかないかのいずれかである。最初に $h \neq 0$ としよう。この時最後の等式は成立しない。次に $h = 0$ としよう。この時は途中で 0 で割算をしている。いずれにせよ矛盾を含む議論をしているので微積分は正当な理論とは認められない。

これに対しニュートンを初めとして，確かに色々な説明をしている。しかし，本質的には答える事が出来なかった。それは極限概念が直観に依存する形で展開され，数学的に厳密とは言い難かった事に原因を求める事ができるかもしれない。しかし，微積分学は，

惑星の運動法則の解明をはじめとして，多くの事に解答を与えた。微積分学は基礎は曖昧であったが，微積分を捨てるには余りに強力で魅力的だった。百科全書派の代表的な一人であるダランベール (1717–1783) の

「前進しよう。信念は後から涌いてくる。」

という言葉がその様子を表わしている。

17,18 世紀を通じて微積分学そしてニュートン力学は大きな成功をおさめる。海王星の存在の予想したことはその象徴的な出来事であった。「微分方程式を用いて運動の将来を厳密に予測できる。」という立場は例えば，ラプラスによる『ラプラスの魔』の考えを生み出したり，哲学に持込まれ，機械論的決定論を生み出す。フランス革命後，フランスでは大学で微積分が講義され始める。そのような状況の下，微積分の基礎を明確にする必要が自覚されてくる。19 世紀の 20–30 年代にコーシー (1789–1857) により『解析教程』のなかで，極限の数学的に厳密な定義が提出される。現在 ε–δ 論法と呼ばれている。

微積分学	
実数論	極限論

微積分学の理論構築のためには，もう 1 つ問題が残っていた。それは「実数とは何か」という問題である。そんなのは分っているというかもしれないが，高校までででは「これこれのものが実数である」というきちんとした定義はやっていない (無限小数も理論的にはキッチリはやってない)。例として，次の問題を考えてみる。

【問題】$\sqrt{2}$ は存在するか。すなわち $x^2 = 2, x > 0$ となる実数は存在するか。

最初に平方根を学んだ時,「$x^2 = 2$,$x > 0$ となる数を $\sqrt{2}$ と呼ぶ。」としたはず。しかし，そのような数が，実数のなかに存在しなければ，定義は意味がない。例えば，$x^2 = -1$ となる実数は存在しない。だから「$x^2 = -1$ となる実数を i と呼ぶ。」と定義しても意味

はない。その「定義」が矛盾なく定義されているかを調べる必要がある。

実数概念の明確化の必要性の認識は次の事情による。「微積分学の基本定理」とよばれている定理があるが (解析学 II で扱う)，それを示すのには「平均値の定理」を必要とする。これを示すには「ロルの定理」，そのためには「最大値定理」と遡って行く事ができるが，最後 (最初のというべきか) の最大値定理の明確な証明のためには「実数とは何か」の解明が必要という事が自覚されてくる。

そうした中，この問題（実数論）は 19 世紀後半に何人かの人によって独立に展開された。カントール (1845–1918)，デデキント (1831–1916)，ワイエルシュトラス (1815–1897) などがその人達である。

このようにして発展してきた微積分だが，実際講義する方法としてはいくつかの立場が考えられる。

(1)　きちんと厳密に議論を進める。

(2)　理論的問題について説明はするが，それほど厳密に議論はすすめない。

(3)　そのような問題には一切ふれない (さわらぬ神にたたりなし)。

高校までの数学は，(3) の立場でやられていた。この講義では (2) の立場をとることにする。

解析学 I 要綱 #2

1　1 変数関数の微分

1.1　実数の基本性質

この節と次の節の内容は完全に理解する事を要求はしない。しかし，微積分を理論的に支えている基礎に「実数論・極限論」がある事は理解しておいてほしい。

$$0.9999999999999999999\cdots = 1$$

という例などでも分かるように実数をきちんと捉らえる事は難しい。どこかに「無限」というものが顔を出す。数学でも実数の概念が「数学的に」明確になったのは (古代ギリシアは除いて) 19 世紀の半ば以降の事である。

$0.9999999999999999999\cdots = 1$ に関して考えよう。

$$1 \div 3 = 0.\dot{3} = 0.333333333333333\cdots$$

なので，$(1 \div 3) \times 3 = 1$ より

$$1 = 0.3333333333333333333\cdots \times 3 = 0.999999999999999\cdots$$

が「分かる」。

もう少し無限小数について議論しよう。実数に対し無限小数表示というものが考えられる。例えば $\alpha = \sqrt{2}$ を考えてみよう。$\sqrt{2}$ は $\alpha^2 = 2, \alpha > 0$ を満たす実数として定義された。$1^2 = 1 < 2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 < 4 = 2^2$ という関係から

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

が分かる。また $1.4^2 = 1.96 < 2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 < 2.25 = 1.5^2$ という関係から

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

が分かる。また $1.41^2 = 1.993881 < 2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 < 2.0164 = 1.42^2$ という関係から

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

が分かる。

これを続けていくと，$1.41421356\cdots$ というような表示が**得られる**。「得られる」と書いたが，ここは少し考えてみる必要があろう。

有限桁でいいなら表示は得られるだろう。しかし，それは $\sqrt{2}$ ではない。$\sqrt{2}$ は有理数でないことが知られており，このことを小数の言葉でいうと,「$\sqrt{2}$ は有限少数でも，循環少数でも表すことはできない」となる。$\sqrt{2}$ の少数表示のすべての桁を決定することはできない。それでは $\sqrt{2}$ が存在すると主張できるのだろうか。それを主張するために，次のように考える。

無限小数表示では**すでに無限個の数字が決定されそれが並んでいる**。

この立場に立つと，実際的には小数点以下すべての数を具体的に決定する事は難しいかもしれないが，$\sqrt{2}$ は確定していて，我々は必要な桁数の数字を決定することができることになる。これが我々が通常実数に対してとっている立場である。

しかしこれだけでは，理論を展開するのに不十分である。ここで逆を考えてみよう。「無限小数は必ず一つの実数を表すのか？」という疑問である。この疑問への肯定的解答が「実数の連続性」と呼ばれる性質であり，通常この事実の成立を仮定するのが我々の立場である。

「実数の連続性」を認める事にして最初に例として挙げた $0.\dot{9} = 1$ を「証明」してみよう。今これは無限小数であるから或る実数を表している。これを α とおく事にしよう。α が 1 以下である事は認めてもよいであろう。さて α が 1 より小さいとしてみる。この時 $0.9,\ 0.99,\ 0.999, \ldots$ と考えていくといつかは α を越える。つまり，ある n が存在して $1 - \alpha > \dfrac{1}{10^n}$ となる。このとき

$$\alpha < 0.\underbrace{9 \cdots 9}_{n\ 個} < 0.\dot{9} = \alpha$$

なので矛盾。よって $\alpha = 1$ である。

この議論は「無限小数とは何か」ということをきちんと定義していないので「数学的」とは言えないが感じはつかめるかもしれない。この事をきちんと定義すれば実数の連続性を定義できる。しかし通常は別の公理を採用して議論する。「実数の連続性」のきちんとした定義の前に，実数の基本性質を整理しておこう。

[1] **演算** : 実数には和 $(+)$ と積 $(\cdot)$ という演算が定義されている

(1) 和の基本性質

1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ \ (a+b)+c = a+(b+c)$ (結合法則)
2) $\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}\ \ a+0 = 0+a = a$ (零の存在)

3) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists a' \in \mathbb{R}\ \ a + a' = a' + a = 0$
この a' を $-a$ と書く (加法の逆元の存在)

4) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \ a + b = b + a$ (交換法則)

(2) 積の基本性質

1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (結合法則)

2) $\exists 1 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}\ \ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (単位元の存在)

3) $\forall a (\neq 0) \in \mathbb{R}\ \exists a'' \in \mathbb{R}\ \ a \cdot a'' = a'' \cdot a = 1$
この a'' を $1/a$ と書く (乗法の逆元の存在)

4) $a \cdot b = b \cdot a$ (交換法則)

(3) 和と積の関係

1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (分配法則)

[2] **順序** : 実数には順序関係 ($\leqq$) が定義されている。

(1) 順序の基本性質

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対し $a \leqq b$ または $b \leqq a$ が成立する。

2) $\forall a \in \mathbb{R}\ \ a \leqq a$

3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ \ a \leqq b,\ b \leqq c \implies a \leqq c$

4) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \ a \leqq b,\ b \leqq a \implies a = b$

(2) 和・積との関係

1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ \ a \leqq b \implies a + c \leqq b + c$

2) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \ a \geqq 0,\ b \geqq 0 \implies a \cdot b \geqq 0$

[3] **連続性** $\cdots$ この性質が有理数と実数を区別するものになっている。色々な人が別々に実数の基礎付けを試みたので幾つか違った定義が有る。ここでは同値な公理をあげておく。

- 任意の無限小数表示に対しそれで表現される実数が存在する。
- $A \subseteq \mathbb{R}$ とする。「$\exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in A\ \ x \leqq \alpha$」が成立するとき，$A$ は上に**有界**であるといい，α を A の**上界**という。A の上界の中に最小の実数が存在するとき，その実数を A の**最小上界**または**上限**という。

空集合でない上に有界な実数の部分集合は最小上界 (上限) を持つ (ワイエルシュトラスの公理)。

- 閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ $(n = 1, \ldots)$ がすべての n に対し $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ を満たすとき，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ である (カントールの公理)。
- 実数全体を空でない2つの部分集合 A, B に分け，A の任意の元は B の任意の元より小さいとき，A に最大元があるか B に最小元があるかのいずれかが起こる (デデキントの公理)。

1.2 極限概念

まず「数列の極限」について考える。極限の定義は次であった。

> 『n が限りなく大きくなる時，a_n は限りなく A に近づく。』とき，数列 a_n は A に収束するといい，この A を極限値という。

しかしこの直観的定義は曖昧である。この定義が数学的に明確なものならその対偶をとっても同値なはずである。対偶命題は

> a_n が限りなく A に近づくかない時，n は限りなく大きくならない。

となるがこれは明確であろうか。イントロでも触れたが微積分は始った時にはその理論的基礎付けは十分明確ではなかった。極限概念に関しても特に 18 世紀には混乱が起こった。一例として $1-1+1-1+\cdots$ という級数を考えてみよう。幾つかの考え方を紹介しよう。

(1) $\alpha = (1-1) + (1-1) + \cdots$ より，$\alpha = 0$

(2) $\alpha = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots$ より，$\alpha = 1$

(3) $\alpha = 1 - (1-1+1-1+\cdots) = 1 - \alpha$ より，$\alpha = 1/2$

以上の議論により，$0 = 1 = 1/2$

収束に関して 18 世紀にはこの様な混乱が起こった。この様ななかで極限概念を明確にしたのはコーシー (Cauchy 1789–1857) であった。彼は概ね以下の様に考えた。「限りなく近づく」という概念は「距離を幾らでも小さくできる」事，もう少し数学的にはっきりさせると「与えられたどんな正の数より距離を小さくできる」事と考えた。

そして「限りなく大きくなる」という概念は「n をいくらでも大きくする」事，もう少し数学的にはっきりさせると「或る大きな自然数よりも大きくする」事と考えた。

定義 1.1 以上からコーシーは数列 a_n が A に収束する事を次の様に定義した。

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\in\mathbb{N} \qquad n>N \implies |a_n-A|<\varepsilon$$

我々も厳密に取り扱う時にはこれを採用する[(1)]。このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{または} \qquad a_n \longrightarrow A \quad (n\longrightarrow\infty)$$

と表す。

言い方を変えると次の様にも言える。「任意の正数 ε に対して a_n と A との距離が ε 以上である n は有限個しかない。」

次の定理は当たり前に見えるかもしれないが極限の定義を厳密にする事なしに「証明」できなかったということは注意する必要がある。

定理 1.2 [**極限の性質**]

(1) **和・定数倍・積・商の極限**

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}ka_n=k\lim_{n\to\infty}a_n$

3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$

4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$ の時, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n}$

(2) **不等式**　$a_n \leqq b_n$ $(n=1,2,\ldots)$ の時, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\leqq\lim_{n\to\infty}b_n$

(3) **はさみうちの定理**　$a_n\leqq b_n\leqq c_n$ $(n=1,2,\ldots)$ の時 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=A$ であれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ も収束して極限値は A。

演習問題 ****1.1**　定理 1.2 を証明せよ (以下微積分の基礎に関する演習問題は (*) 2 つ付けることにする)。

数列の収束では次の定理が理論的にも実際的にも重要である。数列 $\{a_n\}$ が上に**有界**とは「$\exists M\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ a_n\leqq M$」と定義し, $\{a_n\}$ が**単調増加数列**であるとは「$\forall n\in\mathbb{N}\ \ a_{n+1}\geqq a_n$」と定義する。

定理 1.3 上に有界な単調増加数列は収束する。

[(1)]ただし講義では厳密な取り扱いは行わない。

演習問題 ****1.2**　定理 1.3 を証明せよ

理論的な面でいうとこの定理は「実数の連続性」と同値である。この定理の実際上での良い点は「収束するかどうか」という事と「極限値を求める事」を分けられる点である。難しい形の数列の極限を求めるとき，2 つを分けて考える事が有効な場合がある。

例を考えよう。$a_1 = 0, a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1$ (この様な式は**漸化式**と呼ばれる) と帰納的に定義される数列を考える。この数列は上に有界であり，単調増加数列である (演習問題 1.3 参照)。定理 1.3 よりこの数列は収束するので極限値を α とする。漸化式において $n \to \infty$ とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}a_n + 1\right)$，即ち $\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 1$ より $\alpha = 2$ となる。

高校時代に，収束性を調べることなしにこのような議論をした人もいるかもしれない。しかし，$a_1 = 0, a_{n+1} = 2a_n - 1$ という例から分かるように収束性抜きにこの様な議論はできない (演習問題 1.4 参照)。

演習問題 1.3　数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 0, a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1$ で帰納的に定義される数列とする。
(1)　任意の自然数 n に対し $a_{n+1} - a_n \geqq 0$ が成立することを数学的帰納法で示せ。
(2)　任意の自然数 n に対し $a_n \leqq 2$ が成立することを示せ。

演習問題 1.4　数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 0, a_{n+1} = 2a_n - 1$ で帰納的に定義される数列とするとき，$a_n = 1 - 2^{n-1}$ が成立することを示せ。

演習問題 1.5　数列 $\{a_n\}$ が下に**有界**とは「$\exists N \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n \geqq N$」と定義し，$\{a_n\}$ が**単調減少数列**であるとは「$\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_{n+1} \leqq a_n$」と定義する。定理 1.3 を用いて「下に有界な単調減少数列は収束する」ことを証明せよ。

次に「関数の極限」を考えよう。直観的には

> $f(x)$ において x を限りなく a に近づける時 $f(x)$ は A に限りなく近づく

事だが，これもコーシーによって以下の様に考えられ定義された。「限りなく近づく」という概念は数列の場合と同じ様に「与えられたどんな正の数より距離を小さくできる」事と考えた。

また「限りなく近づける」という概念は「距離を小さくする」事，もう少し数学的にはっきりさせると「距離をある値より小さくする」事と考えた。

定義 1.4 以上から関数 $f(x)$ において x を限りなく a に近づけた時 A に収束するとは

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

とコーシーは定義した。我々も厳密に取り扱う時にはこれを採用する。このとき

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{または} \qquad f(x) \longrightarrow A \qquad (x \longrightarrow a)$$

と表す。

$x \to \infty$ も同様に定義される。

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists L \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ L < x \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

このとき

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \text{または} \qquad f(x) \longrightarrow A \quad (x \longrightarrow \infty)$$

と表す。この論法を ε–δ 論法という。

数列の極限に関する定理 1.2 と同様に関数に対しても次を示す事ができる。

定理 1.5 (1) **和・定数倍・積・商の極限**

1) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

2) $\lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a} f(x)$

3) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

4) $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ の時，$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

(2) **不等式** $\forall x\ \ f(x) \leqq g(x)$ の時，$\lim_{x\to a} f(x) \leqq \lim_{x\to a} g(x)$

(3) **はさみうちの定理** $\forall x\ \ f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ の時 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$ であれば $\lim_{x\to a} g(x)$ も収束して極限値は A。

演習問題 ****1.6**　定理 1.5 を証明せよ。

ここでイントロのとき紹介した微積分学に対するバークレーの批判に対し，ε–δ 論法の立場で答えておこう。$y = f(x) = x^2$ の導関数を求める事に対する批判であった。$F = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{2xh + h^2}{h}$ において h で割算して $F = 2x + h$ としておきながら，$\lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$ とするのはおかしいとの批判であった。

コーシーの立場からは次の様な議論になる。任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ を適当に見つけなくてはならないが，今 $\delta = \varepsilon$ としよう。このとき $0 < |h| < \delta$ となる任意の h に対し $|F - 2x| = |h| < \delta = \varepsilon$ となるので，定義より $\lim_{h \to 0} F = 2x$ となる。この立場では $h = 0$ となる事はない。

肩透かしの様な回答に感じるかもしれない。しかし極限における「等号」がきちんと定義されてるのがこの議論のよい点であろう。バークレーの議論ではきちんと定義されていない極限における「等号」を通常の「等号」と同じように扱っていた。

解析学 I 要綱 #3

1.3 連続関数

「関数 (函数)」という概念は微積分というドラマの主人公ともいえるものである。江戸時代日本に「和算」と呼ばれた「数学」があり微積分と似たような事をやっていた。しかしその後の発展には結びつかなかった。私見ではあるが，和算の 2 大弱点として「『生産』と結び付かない」所謂「芸事」であった事に加え，理論的には「『関数概念』がなかった」事が挙げられる。

「関数」は前期に学んだが，歴史的に変化 (発展) しており現代的立場と古典的取り扱いがあった。古典的な取り扱いとは「解析的な式で表されているものが関数である。」とするもので，現代的立場は「対応」ということを前面に出す。ここでは現代的定義をもう一度与えるが，実際の講義の中では古典的取り扱いが所々で顔を出す。

定義 1.6 2 つの数の集合 X，Y に対し X の各元 x に対し Y の元 y を対応させる規則 f が与えられている時 f を X から Y への関数といい，

$$f : X \longrightarrow Y$$

と書く。元 x に元 y が対応している時 $y = f(x)$ と表す。X を定義域 (始域)，Y を終域，$\{y \mid y = f(x), x \in X\}$ を値域という。

現代的立場では厳密には関数 f と元 x における関数の値 $f(x)$ は区別する。例えば 2 次関数を例にとる。古典的立場でいうと，式 $y = f(x) = x^2$ が与えられたら関数が定まったと考える。しかし現代的には対応であるから定義域，終域を決めなくてはならない。例えば $X = \mathbb{R}$(定義域)，$Y = \mathbb{R}$(終域) とし，x に対し x^2 を対応させる規則を f とする。この立場では終域を $Y' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0\}$ としたものは前とは違う関数になる。混乱のおそれがない場合には，この取扱いはいかにも片苦しい。講義では現代的定義を採用するが，誤解の恐れのないときは古典的取り扱いもする。

定義 1.7 2 つの関数 $f : X \longrightarrow Y$ と $g : Y \longrightarrow Z$ に対し関数 $h : X \longrightarrow Z$ で $h(x) = g(f(x))$ となるものが存在する。この関数 h を f と g の**合成関数** (composite function) といい $h = g \circ f$ と表す。

関数 $f : X \longrightarrow Y$ が全単射であるとする。$y = f(x)$ とするとき，y に対し x を対応させる写像が考えられる。これを f の**逆関数** (inverse function) といい f^{-1} で表す。

関数の中でも「連続関数」は解析学において重要である。直感的にはグラフがつながっているという感じだが，定義は極限に基づいてされるのでグラフが書けそうもないものもある。

定義 1.8 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ をある区間 I で定義された関数とする。

(1) $a \in I$ に対し $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$ が成立する時関数 $f(x)$ は $x = a$ で**連続** (*continuous*) という。ただし閉区間の右 (左) 端の点の極限は左 (右) 極限を意味するものとする。

(2) I の任意の点で連続の時 f は I で**連続** (*continuous*) という。

定義の (1) は

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$$

と書き直すと，極限をとるという操作と関数で写すという操作の順序を入れ換える事ができることを意味する。このようなとき 2 つの操作は可換であるという。

連続関数の幾つかの性質を紹介する。これはそれぞれ大事な性質である。

定理 1.9 [**最大値の定理**] 閉区間で定義された連続関数は最大値をとる。

定理 1.10 [**中間値の定理**] 連続関数は中間値をとる。即ち，閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f が $f(a) < f(b)$ を満たしているとする。$f(a) < \alpha < f(b)$ となる任意の α に対しある c $(a < c < b)$ が存在して $f(c) = \alpha$ となる。

定理 1.11 [**逆関数の定理**] 単調で連続な関数に対して逆関数が存在して，その逆関数も連続関数になる。

最大値定理は「実数の連続性」から導かれる。そして最大値定理を用いて「微積分の基本定理」が証明される。上であげた定理はいずれもきちんと証明するためには，基礎理論からきちんと議論する必要がある。

演習問題 ****1.7** 定理 1.9，1.10，1.11 を証明せよ。

1.4　導関数

関数 f の導関数 f' は (存在する場合) 次の式で定義されるものであった。

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

x においてこの極限が存在するとき，f は x で**微分可能** (*differentiable*) であるという。定義域の各点で微分可能であるとき，関数 f は**微分可能** (*differentiable*) であるという。ただし f の定義域が閉区間 I のとき区間の左端の点 a で微分可能とは次の右極限が存在する場合をいう事とする。

$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{h\to +0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

右端の点の場合は次の左極限の存在する場合をいう。

$$f'(a) = f'_-(a) = \lim_{h\to -0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

演習問題 1.8　微分可能な関数は連続であることを示せ。また連続であるが微分可能でない関数の例をあげよ。

前期すでに学んでいる部分もあるので，ここでは「微分 = 線型近似 (1 次近似)」見方に関してのみ説明しておく。f は微分可能とする。今 $x = a+h$ とし，a のまわりの関数の様子を考える。$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = \varepsilon$ とおくと $h \to 0$ のとき $\varepsilon \to 0$ となる。つまり

$$f(x) = f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon h$$

において h が非常に小さいとき，εh は (**非常に**)^2 小さいと考えられる。この項を無視した残りの項は h の 1 次式になるが，これが $f(x)$ を近似しているので，**線型近似**と呼ばれる。

逆に微分可能な関数 $f(x) = f(a+h)$ を h に関する 1 次式 $A+Bh$ で「近似」する事を考える。直線と関数の差を

$$d(h) = f(a+h) - (A+Bh)$$

とおく。「近似」と呼ぶには $d(0) = 0$ は必要であろう。このとき $d(0) = f(a) - A$ なので $A = f(a)$ となる。「近似がよい」ことを「$d(h)$ が小さいこと」と考える。$\varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) =$

0 となるとき $d(h)$ は (**非常に**)^2 小さいと考えられるので，これを「近似がよい」ことの定義として採用する。このとき

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h)-(f(a)+Bh)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - B$$

となるので $B = f'(a)$ のとき $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ となる。よって一番近似のよいのは $f(a)+f'(a)h$，即ち接線であることが分かる。

以上のことから「微分」,「線型近似」,「接線」は三位一体の関係にあると言える。

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{微分}} \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & & \boxed{\text{線型近似}} \arrow[dl, Leftrightarrow] \\ & \boxed{\text{接線}} & \end{tikzcd}$$

次に $f(x) = f(a+h)$ を h に関する 2 次式 $A + Bh + Ch^2$ で近似することを考える。$d(h) = f(a+h) - (A + Bh + Ch^2)$ に対し $\varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h^2}$ とおく。$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立するとき，この 2 次式を「近似が一番よい 2 次式」と定義する。このとき $d(h) = \varepsilon(h)h^2$ なので $d(0) = 0$ としてよい。よって $d(0) = f(a) - A = 0$ より $A = f(a)$ となる。$\lim_{h\to 0} \dfrac{d(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h)h = 0$ なので

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-(f(a)+Bh+Ch^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - B - Ch \right) \\ &= f'(a) - B \end{aligned}$$

となるので $f'(a) = B$ が分かる。また

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-(f(a)+f'(a)h+Ch^2)}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h)-f'(a)-2Ch}{2h} \qquad \text{(ロピタルの定理を使用)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f''(a)-2C}{2} \end{aligned}$$

となるので $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ より $C = \dfrac{f''(a)}{2}$ となる。よって近似の一番よい 2 次式は

$$f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2$$

となる。

この 1 次近似，2 次近似を幾何学 (図形) 的に見てみよう。$y = f(x) = x^3 - x$ とする。これを $x = 1$ で近似することを考える。定義に基づいて導関数を求めて計算できるが，ここでは多項式という性質を用いて計算する。$x = 1$ で近似するので，$x = h + 1$ とする。$f(x)$ を h で表すと，

$$f(x) = (1+h)^3 - (1+h) = 2h + 3h^2 + h^3$$

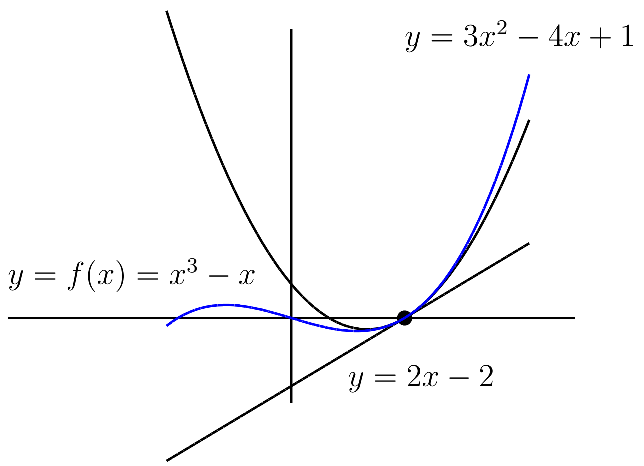
となる。多項式の場合，h による展開で 2 次以上の項をカットして得られる 1 次式が近似のよい 1 次式になっている。また h による展開で 3 次以上の項をカットして得られる 2 次式が近似のよい 2 次式になっている。この場合それらは

$$2h, \qquad 2h + 3h^2$$

になる。このままでもよいが，x に書き換えると

$$\begin{aligned} 2h &= 2(x-1) = 2x - 2 \\ 2h + 3h^2 &= 2(x-1) + 3(x-1)^2 = 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

である。$x = 1$ の近くでは直線も 2 次式も勿論よい近似を与えているが，2 次式は曲がりぐあいも含めてよく表現していることが分かる。



演習問題 1.9　近似の一番よい 3 次式を求めよ。ここで近似の一番よい 3 次式 $g(h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3$ とは $d(h) = f(a+h) - g(h)$ に対し $\varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h^3}$ とおくとき $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立するものをいう。関数は何回でも微分できることを仮定する。

演習問題 1.10　次の関数 $y = f(x)$ を $x = a$ で一番良く近似する 1 次式，2 次式，3 次式を求めよ。

(1) $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$　(a=0)　(2) $f(x) = e^x$　$(a = 1)$
(3) $f(x) = (x+1)^5$　$(a = 0)$

ここで前期に学んだ定理について結果のみ記しておく。理解があやふやな人は復習しておくこと。

定理 1.12 関数 f, g は微分可能とし，a は定数とする。
(1) $(f+g)' = f' + g'$
(2) $(af)' = af'$
(3) $(fg)' = f'g + fg'$　(**積の微分法**)

定理 1.13 [**合成関数の微分法**]　関数 $y = f(x)$ と $z = g(y)$ が共に微分可能で合成関数
$z = g \circ f(x) = g(f(x))$ が定義されるとき

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

が成立する。

定理 1.14 [**逆関数の微分法**]　ある区間 I または実数全体で定義された関数 f が微分可能かつ単調であるとき，逆関数は微分可能で導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

定理 1.15

(1) $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$　(2) $\left(e^x\right)' = e^x$
(3) $\left(a^x\right)' = a^x \log a$　(4) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$
(5) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$　(6) $(\sin x)' = \cos x$
(7) $(\cos x)' = -\sin x$　(8) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
(9) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(10) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(11) $\left(\arctan x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

導関数の計算は数学序論ですでにやっているので，演習問題は用意しなかった。微分の計算がよくわからないという人は数学序論の導関数の計算部分の演習問題をもう一度やってみる事。

1.5　平均値の定理

この節で取り上げる平均値の定理は微積分学全体の中でもキーポイントとなる重要な定理である。「或る区間で $f'(x) > 0$ ならはそこで単調増加」という命題もこの定理から導かれる

定理 1.16 [**平均値の定理**]　関数 f は閉区間 $[\,a, b\,]$ で連続，開区間 $(\,a, b\,)$ で微分可能とする。このとき $a < c < b$ を満たす c が存在して

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成立する。

この定理を示すために次の定理を用いる。

定理 1.17 [**Rolle(ロル) の定理**]　関数 f は閉区間 $[\,a, b\,]$ で連続，開区間 $(\,a, b\,)$ で微分可能とする。$f(a) = f(b)$ ならば $a < c < b$ をみたす c が存在して $f'(c) = 0$ が成立する。

証明　最大値定理より最大値を与える c が存在する。今 $a < c < b$ を仮定する。c は最大値を与えるので任意の h に対し $c + h$ が区間 $[\,a, b\,]$ に入っていれば $f(c + h) \leqq f(c)$ が成立する。$h > 0$ のとき $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqq 0$ なので

$$f'(c) = f'_{+}(c) = \lim_{h \to +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqq 0$$

が成立する。また $h < 0$ のとき $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqq 0$ なので

$$f'(c) = f'_{-}(c) = \lim_{h \to +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqq 0$$

が成立する。$0 \leqq f'(c) \leqq 0$ より $f'(c) = 0$ である。

途中 $a < c < b$ を仮定したが，これが成立しない場合 $f(a) = f(b)$ が最大値となっている。f が定数関数の場合は定理は成立しているので定数関数でないと仮定する。このときは前述の議論を最小値に関して行えばよい (演習問題 1.11 参照)。 ∎

演習問題 1.11　定理の証明の最後の部分 (最小値 c が $a < c < b$ に存在するとき $f'(c) = 0$ となる) を証明せよ。

この定理から平均値の定理が示されるが，ここでは平均値の定理を一般化した次の定理を示す。

定理 1.18 [コーシーの平均値定理] 関数 f, g は閉区間 $[\,a, b\,]$ で連続，開区間 $(\,a, b\,)$ で微分可能とする。$(\,a, b\,)$ で $g'(x) \neq 0$ ならば $a < c < b$ をみたす c が存在して

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

が成立する。

定理において $g(x) = x$ とおくと平均値の定理になる。

証明 天下りではあるが

$$F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

とおく。この関数 F は $[\,a, b\,]$ で連続，(a, b) で微分可能である。また $F(a) = 0, F(b) = 0$ が成立する。よって Rolle の定理より $c\ (a < c < b)$ が存在して $F'(c) = 0$ が成立する。

$$F'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$$

なので

$$0 = F'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$$

が成立する。$g(x)$ に Rolle の定理を適用すると $g(b) - g(a) \neq 0$ が得られる。割り算を実行すれば定理が得られる。∎

ここで平均値の定理を少し拡張した形で書き直しておこう。$b = a + h$ とし，$\theta = \dfrac{c - a}{h}$ とおくと平均値の定理は

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h \quad (0 < \theta < 1)$$

となる θ が存在するという形になる。この形で考えると，h が負のときも定理は成立する。即ち次の形で述べる事ができる。

定理 1.19 関数 f は区間 I で微分可能とする。$a, a+h$ が区間 I に属しているとする。このときある $\theta\ (0 < \theta < 1)$ が存在して

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h$$

となる。

平均値の定理から次の系が従う。

系 1.20 f, g は区間 I で微分可能とする。

(1) 区間 I において $f'(x) = 0$ ならば $f(x)$ は定数関数である。

(2) 区間 I において $f'(x) = g'(x)$ ならばある定数 C が存在して $f(x) = g(x) + C$ と書ける。

系 1.21 f は区間 I で微分可能とする。

(1) 区間 I において $f'(x) > 0$ ならば f は単調増加である。

(2) 区間 I において $f'(x) < 0$ ならば f は単調減少である。

系 1.22 f は区間 I で微分可能とする。

(1) 区間 I において $f'(x) \geqq 0$ ならば f は単調非減少である。

(2) 区間 I において $f'(x) \leqq 0$ ならば f は単調非増加である。

演習問題 1.12 　平均値の定理から系 1.20, 1.21,1.22 を導け。

これらの定理・系についていくつか注意。解析学 II で「微積分の基本定理」と呼ばれる定理を証明するが，そのときときキーになる命題が系 1.20 である。系 1.21，1.22 は数学序論においても学んだ増減表・グラフの概形を描くことの基礎にある命題である。また定理 1.18 は数学序論で不定形の極限を求めるとき有効だったロピタルの定理の基礎にある定理である。

通常の講義であれば次にロピタルの定理などの応用を扱うのだが，序論で扱っているので省略する。理解があやふやな人は序論の該当部分を復習しておくこと。

演習問題 *__1.13__ 　定理 1.18 を用いてロピタルの定理を証明せよ。ロピタルの定理とは以下の内容の定理である。

f, g は a の周りで微分可能とする。$f(a) = g(a) = 0$ あるいは, $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ となるとき，$\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して，両者の値は一致する。ここで a は $\pm\infty$ でもよい。

解析学 I 要綱 #4

1.6 高次導関数と Taylor の定理

関数 $y=f(x)$ の導関数が微分可能なとき更にその導関数を考える事が出来る。$y=f(x)$ の導関数の導関数を 2 次導関数または 2 階の導関数といい

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f''(x), \quad y''$$

などと表す。$y=f(x)$ の導関数の導関数の導関数を 3 次導関数または 3 階の導関数といい

$$\frac{d^3f}{dx^3}(x), \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad f'''(x), \quad y'''$$

などと表す。n を自然数とする。$f(x)$ を n 回微分して得られる関数を n 次の導関数または n 階の導関数といい

$$\frac{d^nf}{dx^n}(x), \quad \frac{d^ny}{dx^n}, \quad f^{(n)}(x), \quad y^{(n)}$$

と表す。$f^{(0)}(x)$ は $f(x)$ を 0 回微分した 0 次導関数を意味するので，$f(x)$ と同じものである。2 階以上の導関数を高次導関数と呼ぶ。以下この節では関数は**必要な回数だけ微分可能**である事を仮定する。

関数の和の高次導関数を考える。$F(x)=f(x)+g(x)$ とすると

$$F'(x)=f'(x)+g'(x)$$

であり，もう一度微分すると

$$F''(x)=f''(x)+g''(x)$$

となる。何回微分しても同様なので

$$(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$$

となる。

関数の積の高次導関数を考える。$F(x)=f(x)g(x)$ のとき積の微分法より

$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

である。もう一度微分すると

$$\begin{aligned}F'(x)&=f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)+f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)\\&=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)\end{aligned}$$

となる。一般に次が成立する。

命題 1.23 [ライプニッツの定理]

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

ここで $\binom{n}{k}$ は 2 項係数で $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ である。

演習問題 1.14 ライプニッツの定理を数学的帰納法で証明せよ。2 項係数に関して

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}&=\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\\&=\frac{kn!}{k(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)(n-k)!}\\&=\frac{kn!}{k!(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

が成立することを注意しておく。

例 1.24 (1) $f(x)=xe^x$ の n 次導関数を求める。$h=e^x, g=x$ とおくと，$g'=1$, $g''(x)=0$, $g^{(n)}(x)=0$ $(n\geqq 2)$ であり，$h^{(n)}=e^x$ なのでライプニッツの定理より

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^{(n-k)}g^{(k)}=xe^x+ne^x$$

となる。

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とする。$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，$f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$，$f'''(x)=-\dfrac{6}{x^4}=-\dfrac{3!}{x^4}$ なので

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$$

と予想できる。これを数学的帰納法で証明する。

$n=1$ のときは

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}=(-1)^1\frac{1!}{x^{1+1}}$$

なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^k\dfrac{k!}{x^{k+1}}$ を仮定する。両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'&=\left((-1)^k\frac{k!}{x^{k+1}}\right)'\\&=(-1)^k(-(k+1))\frac{k!}{x^{k+2}}=(-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{x^{(k+1)+1}}\end{aligned}$$

なので $k+1$ のときも成立する。

演習問題 1.15　次の関数の n 次導関数を求めよ。

(1) $f(x) = x^4$

(2) $f(x) = x^3 e^x$

(3) $f(x) = x^3 \log x$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(5) $f(x) = \log(x+1)$

(6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

(7) $f(x) = \sin x$

(8) $f(x) = \sin x \cos x$

次の定理は「Taylor の定理」と呼ばれ色々な応用がある。

定理 1.25 [Taylor(テーラー) の定理]

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

を満たす $\theta\ (0 < \theta < 1)$ が存在する。$R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$
を**剰余項**と呼ぶ。

証明　天下りではあるが，$R = f(x) - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$ と

置き，

$$F(t) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right) - \frac{R}{(x-a)^n}(x-t)^n$$

と置くと，

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= -\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}\right) + \frac{R}{(x-a)^n}n(x-t)^{n-1} \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} + \frac{R}{(x-a)^n}n(x-t)^{n-1} \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \frac{R}{(x-a)^n}n(x-t)^{n-1} \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{R}{(x-a)^n}n(x-t)^{n-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{R}{(x-a)^n} n(x-t)^{n-1} \\
&= \left(\frac{R}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(t)}{n!} \right) n(x-t)^{n-1}
\end{aligned}
$$

このとき,

$$
\begin{aligned}
F(a) &= f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) - \frac{R}{(x-a)^n}(x-a)^n \\
&= f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) - R \\
&= R - R = 0 \\
F(x) &= f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^k \right) - \frac{R}{(x-a)^n}(x-x)^n \\
&= f(x) - f(x) = 0
\end{aligned}
$$

が成立するのでロルの定理より $\dfrac{dF(c)}{dt} = 0$ $(a < c < x$ または $x < c < a)$ となる c が存在する。このとき $\dfrac{R}{(x-a)^n} - \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!} = 0$ が成立する。$\theta = \dfrac{c-a}{x-a}$ と置くと定理が得られる。∎

定理 1.25 は次の形でも述べることができる。

系 1.26 任意の h に対し，ある θ $(0 < \theta < 1)$ が存在して

$$
f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n
$$

と表せる。

Taylor の定理の最初の応用として極値に関する次の定理を考える。

定理 1.27 $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0$ とする。

(1) n が偶数のとき $f(x)$ は $x = a$ で極値をとる。

1) $f^{(n)}(a) > 0$ のとき $f(a)$ は極小である。

2) $f^{(n)}(a) < 0$ のとき $f(a)$ は極大である。

(2) n が奇数のとき $f(x)$ は $x=a$ で極値をとらない。

1) $f^{(n)}(a)>0$ のとき $f(a)$ は増加の状態にある。

2) $f^{(n)}(a)<0$ のとき $f(a)$ は減少の状態にある。

証明　(1), (2) とも 1) の場合のみ示す。$f^{(n)}$ 連続かつ $f^{(n)}(a)>0$ なので a を含むある区間 $(a-\delta, a+\delta)$ において $f^{(n)}(x)>0$ となる。この区間内の x についてテーラーの定理を適用すると $f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ なので

$$f(x)-f(a)=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \qquad (0<\theta<1)$$

となる。

(1) 即ち n が偶数の場合 $x \neq a$ ならば $(x-a)^n > 0$ なので，$f(x)-f(a)>0$ 即ち $f(x)>f(a)$ となる。よって f は $x=a$ で極小である。

(2) 即ち n が奇数の場合 $x>a$ なら $(x-a)^n>0$，$x-a<0$ ならば $(x-a)^n<0$ である。よって $x>a$ ならば $f(x)>f(a)$，$x<a$ ならば $f(x)<f(a)$ となっている。 ∎

演習問題 1.16　定理 1.27 の (1),(2) の 2) の場合を証明せよ。

Taylor の定理の 2 番目の応用として近似がある。3 次式までの近似はすでに扱っているが，Taylor の定理を用いると「誤差の評価がきちんとできる」という利点がある。$n=2$ の場合を考える。

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

となるが $(c=a+\theta(x-a))$，$f''(x)$ は有界なので，$x-a$ が非常に小さいとき，最後の項は (**非常に**)^2 小さい。よってこの項を無視して考える。これは線型近似を与えた。

真の値 $f(x)$ と近似値 $f(a)+f'(a)(x-a)$ の差を**誤差**と言うが，誤差が最大どれ位になるかを評価しよう。誤差を Δ とすると

$$\Delta=f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))=\frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$$

となるので $|f''(x)|$ の最大値を

$$M=\max\{\,|f''(x)| \mid x\in I\,\} \qquad (I=[\,a,\,x\,]\text{ または }[\,x,\,a\,])$$

とすると

$$|\Delta| \leqq \frac{M}{2}|x-a|^2$$

が分かる。

例を考える。$f(x)=\sin x$, $x=\dfrac{5\pi}{16}$, $a=\dfrac{\pi}{4}$ とすると近似値は

$$\sin\left(\frac{5\pi}{16}\right) \fallingdotseq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{5\pi}{16}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{16}$$

である。$f''(x)=-\sin x$ より $M=\max\{\,|f''(x)|\mid x\in I\,\}=1$ なので誤差の最大値は

$$|\Delta|=\left|\frac{f''(x)}{2}(x-a)^2\right| \leqq \left|\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\right| < \frac{1}{2}\left(\frac{4}{16}\right)^2=\frac{1}{32}$$

であることが分かる。

次に $n=3$ の場合を考える。

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3$$

$x-a$ が非常に小さいとき最後の項は (**非常に**)^3 小さい。この項を無視して $f(x)$ を

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

で近似する。これは線型近似より一般的にはよりよい近似になっている。

前に考えた $f(x)=\sin x$, $x=\dfrac{5\pi}{16}$, $a=\dfrac{\pi}{4}$ で $n=3$ の場合を考える。近似値および誤差の最大値は

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{5\pi}{16}\right) &\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\\ &=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{5\pi}{16}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{5\pi}{16}-\frac{\pi}{4}\right)^2\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{16}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\\ |\Delta| &=\left|\frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3\right| \leqq \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{16}\right)^3<\frac{1}{6}\left(\frac{4}{16}\right)^3=\frac{1}{384}\end{aligned}$$

となる。

$f(a+h)$ と h に関する n 次式 $g(h)$ に対し $d(h)=f(a+h)-g(h), \varepsilon(h)=\dfrac{d(h)}{h^n}$ とおく。$\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立するとき $g(h)$ を $f(a+h)$ を $x=a$ で一番よく近似する n 次式という。

命題 1.28 $f(x)$ に対し h に関する n 次式

$$g(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k$$

は $f(a+h)$ を $x=a$ で一番よく近似する n 次式である。

証明 $d(h) = f(a+h) - g(h) = \dfrac{f^{n+1}(a+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}$ なので $\varepsilon(h) = \dfrac{f^{n+1}(a+\theta h)}{(n+1)!} h$ となる。$M = \max\left\{ |f^{(n+1)}(a+\theta h)| \,\middle|\, 0 \leqq \theta \leqq 1 \right\}$ とおくと $|\varepsilon(h)| \leqq \dfrac{M}{(n+1)!}|h|$ が成立する。よって $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立する ∎

自然対数の底 e の近似計算をこの方法により考える。$f(x) = e^x, a = 0, x = 0 + h$ とする。$f'(x) = e^x$ より，任意の n に対し $f^{(n)}(x) = e^x$ となる。剰余項 R_{n+1} を切り捨てた近似式を $g_n(x)$ とすると

$$g_n(h) = 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}h^n$$

となる。$a_n = g_n(1)$ が e の近似値を与える。$n = 10$ とすると

$$\begin{aligned} a_{10} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} \\ &= 2.718281801 \end{aligned}$$

となる。a_{10} の誤差 Δ はテーラーの定理で $n = 11$ としたときの剰余項なので

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \left| \frac{f^{(11)}(c)}{11!}(1-0)^{11} \right| = \frac{e^c}{11!} \leqq \frac{e}{11!} < \frac{3}{11!} \\ &= 7.515632515632516 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

e の近似値を 10^{-10} 以下の誤差になるように求めたいとする。剰余項 R_n が誤差になるので

$$|\Delta| = |R_n| = \frac{e^c}{n!} \leqq \frac{e}{n!} < \frac{3}{n!} < 10^{-10}$$

を満たす n を，即ち $n! > 3 \times 10^{10}$ を満たす n を求めればよい。これを満たす最小の n は

$$14! = 87178291200 > 8.7 \times 10^{10} > 3 \times 10^{10}$$

より 14 である。よって

$$a_{13} = 2.718281828446759$$

が求めるものになる。

演習問題 1.17　$f(x) = e^x$ を $a = 0, n = 6$ としてテイラーの定理を用いて表し，その剰余項 R_6 を切り捨てることにより $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。

更に同様な方法で誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決め近似値を求めよ。計算実行には電卓等を用いてよい[(1)]。

演習問題 1.18　$f(x) = \cos x$ を $a = 0, n = 6$ としてテイラーの定理を用いて表し，その剰余項 R_6 を切り捨てることにより $\cos\dfrac{\pi}{10}$ の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。

更に同様な方法で誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決め近似値を求めよ。計算実行には電卓等を用いてよい。

3 番目の応用として Taylor 級数展開がある。テーラーの定理の剰余項 $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となるとき，関数は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

と表すことができる。これを $x = a$ でのテーラー級数と言い，このとき $f(x)$ は $x = a$ でテーラー (級数) 展開可能であるという。これから考える $f(x)$ が**テーラー展開可能**である事は仮定しておく。

$f(x) = e^x, a = 0$ とする。$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ なのでテーラー級数は

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

となる。

$f(x) = \sin x$ のときは，$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x, f''''(x) = \sin x \ldots$ より，$f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n-1}\cos x, f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ なので $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}, f^{(2n)}(0) = 0$ である。テーラー級数は

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

[(1)]厳密には電卓の計算誤差も考慮する必要がある。10 桁程度なので電卓等の誤差は無視することにする

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

となる。

$f(x) = \cos x$ のとき $f^{(2n-1)}(x) = (-1)^n \sin x, f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$ より $f^{(2n-1)}(0) = 0, f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ である。$\cos x$ のテーラー級数は

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\end{aligned}$$

となる。

e^x の級数展開の x に形式的に ix (i は虚数単位即ち $\sqrt{-1}$) を代入する事により，オイラーは次のオイラーの公式を導いた。

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(ix)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(ix)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(ix)^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i \cdot i^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\ &= \cos x + i \sin x\end{aligned}$$

演習問題 1.19　次の関数の $x = 0$ におけるテーラー級数を求めよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。この問題のテーラー級数は $-1 < x < 1$ の場合のみ考える。一般の実数 α と自然数 n に対し

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n \geqq 1), \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

と定義する。これは α が自然数の場合の 2 項係数の拡張になっている。

(1) $f(x) = \log(1+x)$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(3) $f(x) = \sqrt{1+x}$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

演習問題 1.20　次の関数を $x = a$ でテーラー (級数) 展開せよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x) = x^5 \quad (a = 1)$　　(2) $f(x) = e^x \quad (a = 1)$
(3) $f(x) = \sin x \quad (a = \pi)$　　(4) $f(x) = \log x \quad (a = 1)$

演習問題 *1.21　次を示せ。$1 \leqq p \leqq n$ を満たす実数 p に対し

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n$$

を**ロシュの剰余項**と呼ぶ。$p = n$ とすると定理 1.25 の剰余項になる。これを**ラグランジェの剰余項**という。$p = 1$ としたものを**コーシーの剰余項**と呼ぶ。

演習問題 *1.22　次の関数がテーラー級数展開可能であること，即ち剰余項 R_n に対し $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ が成立することを示せ。最初の 3 つの式は任意の x について成立するが，最後の 2 つには制限がつく。

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k \qquad (-1 < x < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad (-1 < x < 1)$$

演習問題 *1.23　次の関数は何回でも微分可能であるが，$x = 0$ でテーラー級数展開可能でないことを次にしたがって示せ。

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

(1) $g(t)$ を n 次の多項式とするとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{e^t}=0$ が成立することを n に関する数学的帰納法で示せ ($n=0$ から始めること)。

(2) $f^{(n)}(x)$ はある多項式 $P_n(t)$ を用いて

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \\ 0 & (x\leqq 0) \end{cases}$$

と表されることを n に関する数学的帰納法で示せ ($n=0$ から始めること)。

(3) $f(x)$ が $x=0$ でテーラー級数展開可能だと仮定すると矛盾することを示せ。

テーラー級数は色々な応用があるが，ここでは極限に対する応用のみを扱う。$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$ をテーラー級数を利用して求めてみよう。

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$

なので

$$\begin{aligned}\cos x-1&=-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\\ \frac{\cos x-1}{x^2}&=-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}x^2+\cdots\end{aligned}$$

となる。よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

となる。

演習問題 1.24　テーラー級数を用いて次の極限値を求めよ。それぞれの関数のテーラー級数は既知としてよい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$

解析学 I 要綱 #5

1.7　曲線の概形

関数が与えられたときその概形を描くことは，基本的で重要なことである。すでに数学序論でやっているが，再度簡単に触れる。

関数 $y = f(x)$ の概形を描くためには次の様なことを調べることが必要である。

(1) $f'(x)$ を求め，$f'(x) = 0$ となる x を求める。それを $x_1, x_2, \dots, x_k$ とすると x_i と x_{i+1} の間で $f'(x)$ が正になるか負になるかを調べる。

(2) 凹凸を調べるときは，$f''(x)$ を求め $f''(x) = 0$ となる x を求める。それを $x'_1, x'_2, \dots, x'_\ell$ とすると x'_i と x'_{i+1} の間で $f''(x)$ が正になるか負になるかを調べる。

(3) 臨界点 ($f'(x) = 0$ となる点)，x 軸および y 軸との交点など特徴的な点の座標を求める。

(4) その他関数に特有な必要なことがあれば調べる。

例 1.29 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ のグラフの概形を描く。

$$f'(x) \quad = \quad \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

であるから，臨界点は $x = \pm 1$ である。$f'(-2) = -\dfrac{3}{25} < 0$，$f'(0) = 1 > 0$，$f'(2) = -\dfrac{3}{25} < 0$ となっている。

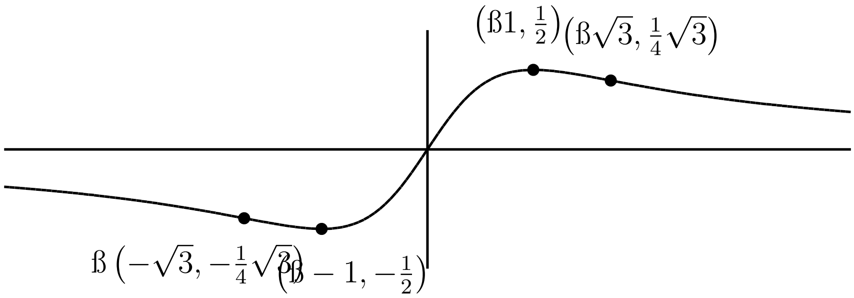
$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

であるから，$f''(x) = 0$ となる x は $x = 0, \pm\sqrt{3}$ である。$f''(2) = \dfrac{4}{125} > 0$，$f''(1) = -\dfrac{1}{2}$，$f''(-1) = \dfrac{1}{2}$，$f''(-2) = -\dfrac{4}{124} < 0$ となっている。$f(-\sqrt{3}) = -\dfrac{1}{4}\sqrt{3}$，$f(-1) = -\dfrac{1}{2}$，$f(0) = 0$，$f(1) = \dfrac{1}{2}$，$f(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{4}\sqrt{3}$ より，増減表を作ると，

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{1}{4}\sqrt{3}$	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	0	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	$\dfrac{1}{4}\sqrt{3}$	↘

となり，$x=-1$ は極小点，$x=1$ は極大点，$x=\pm\sqrt{3}$ は変曲点であることがわかる。x 軸との交点の x 座標は $f(x)=0$ を解いて $x=0$ であり，y 軸との交点の y 座標は $f(0)=0$ である。

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ に注意すると，グラフの概形は次のようになることがわかる。



パラメータ表示された曲線の概形

$(x(t), y(t))$ とパラメータ表示された曲線の概形を描くためには次の様なことを調べることが必要である。

(1) $x'(t)$ を求め，$x'(t)=0$ となる t を求める。それを $t_1, t_2, \ldots, t_k$ とすると t_i と t_{i+1} の間で $x'(t)$ が正になるか負になるかを調べる。

(2) $y'(t)$ を求め，$y'(t)=0$ となる t を求める。それを $t'_1, t'_2, \ldots, t'_\ell$ とすると t'_j と t'_{j+1} の間で $y'(t)$ が正になるか負になるかを調べる。

(3) 各区間 ($t_i < t < t'_j$ 等) で t が増加した場合点 $(x(t), y(t))$ がどの方向に移動するかを調べる。

(4) 曲線と x 軸，及び y 軸との交点の座標を求める。また曲線が方向を変える点の座標を求める。

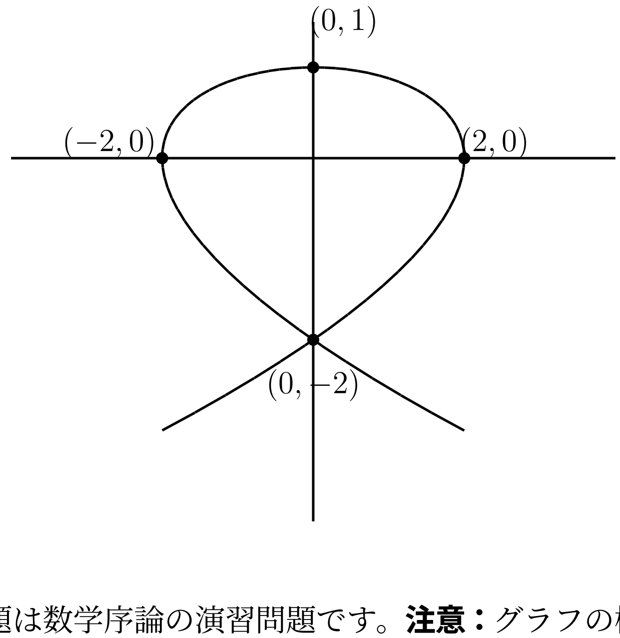
(5) その他必要なことがあれば調べる。

$x = x(t) = 3t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2$ でパラメータ表示された曲線の概形を書こう。

$x'(t) = 3 - 3t^3$ より $t = \pm 1$ において $x'(t) = 0$ となる。また $x'(-2) = -9 < 0$，$x'(0) = 3 > 0$，$x'(2) = -9 < 0$ となっている。$y'(t) = -2t$ より $t = 0$ において $y'(t) = 0$ となる。また $y'(-1) = 2 > 0$，$y'(1) = -2 < 0$ となっている。よって増減表は以下の様になる。

t		-1		0		1	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

$x = 0$ となるのは $t = 0, \pm\sqrt{3}$, $y = 0$ となるのは $t = \pm 1$ である。即ちこの曲線は x 軸と $(2, 0), (-2, 0)$ で交わり，y 軸とは $(0, 1), (0, -2)$ で交わる。また方向を変えるのは $t = \pm 1, 0$ のときであり，点は $(x(-1), y(-1)) = (-2, 0)$，$(x(0), y(0)) = (0, 1)$，$(x(1), y(1)) = (2, 0)$ である。このことに注意して概形を描くと次の様になる。



次の問題は数学序論の演習問題です。**注意：**グラフの概形が描けると自分で思う人は 1〜2 題確認の意味で描いて下さい。そうでない人はすべてやって下さい。

演習問題 1.25　次の関数のグラフの凹凸を調べ概形を描け。

(1) $f(x) = 2x^2 - x^4$

(2) $f(x) = xe^{-x}$

(3) $f(x) = x^2 \log x$

(4) $f(x) = 3\sin x + \sin 3x$

(5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$

(6) $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

(7) $f(x) = x + 2\cos x$

(8) $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$

(9) $f(x) = x^{-x^2}$

(10) $y = (x-5)^4(x+1)^3$

(11) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

(12) $y = e^{-x^2}$

(13) $y = x\log x$

次の演習問題も数学序論の問題です。前の演習問題の注意に留意して解いて下さい。

演習問題 1.26　次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

(1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$

(2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$

(3) $x = x(t) = t^2 - t^3, y = y(t) = 2t^4 - t$

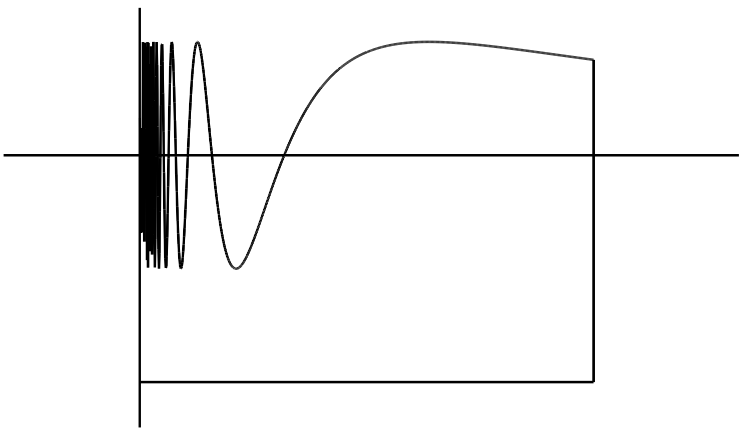
数学序論要綱 #6

2　多変数関数の微分 (偏微分)

この章では多変数関数の微分を扱う。1 つのファクターで決定される事象を形式化したのが 1 変数関数とするならば，多変数関数はいくつかの (複数個の) ファクターによって決定される事象を形式化したものといえる。多変数関数は定義域自身も複雑な場合があるのでその話から始める。

2.1　点集合

2 変数関数の定義域 D は $\mathbb{R}^2$ の部分集合である。$\mathbb{R}^2$ の部分集合は複雑であり，これをきちんと捉えるには理論的考察が必要になる。1 変数関数の定義域は $\mathbb{R}$ の部分集合だったので考える対象は閉区間，開区間，半開区間などで十分であり，特別な理論的考察は必要なかった。



図は

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x < 1, -2 < y < \sin\frac{1}{x} \right\}$$

で定義される領域である。領域の境界を ∂D と書くが，この図の ∂D はどのようになっているのであろう。この図はまだ境界を大体推定できそうであるが,

$D = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1, x \in (-15, 5), y \in (-15, 5)\}$

に対しては境界 ∂D はどう考えたらよいのであろう。

この様に一般の図形を対象にした場合境界等の定義が問題になる。そこで講義では次に述べるような限定をして取り扱うことにする。

注意 2.1 [**大事な限定**] 以下，我々はほとんどの場合，2 変数関数の定義域は『有限個のなめらかな曲線でかこまれた図形』に限る事にする。3 変数関数の定義域は『有限個のなめらかな曲面でかこまれた図形』に限る事にする。

D をそのようなものとするとき,『有限個の滑らかな曲線』または『有限個の滑らかな曲面』を ∂D と考える。$D-\partial D$ を D の内部と呼ぶ。また $D \supseteq \partial D$ となる領域を**閉領域**といい，$D \cap \partial D = \emptyset$ となる領域を**開領域**という。

領域を限定しない場合は理論的に厳密に取り扱う必要がある。この講義では厳密には取り扱わない。ただし厳密な取り扱いを求める人のために要綱にはきちんと書いておこう。以下この節は説明部分に演習問題と同様な星印がついていると考えて下さい (文字も少し小さくしました)。

平面内の点集合をとらえるとき，基礎になるのが**距離**の概念である。$P=(x,y)$,$Q=(x',y')\in\mathbb{R}^2$ に対し

$$d(P,Q)=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

とおくと,

(1) 正値性：$d(P,Q)\geqq 0$。等号成立は $P=Q$ のときのみ

(2) 対称性：$d(P,Q)=d(Q,P)$

(3) 3 角不等式：$d(P,R)\leqq d(P,Q)+d(Q,R)$

が成立する。距離に関する性質はこの 3 つから導かれる。空間の時は $P=(x,y,z),Q=(x',y',z')$ に対し

$$d(P,Q)=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(y-y')^2}$$

とおくと，同様な事が成立する。一般化する場合は，逆に性質 (1) – (3) が成り立つようなものを距離と考える。

定義 2.2 以下，もっぱら 2 次元 (平面) に関して議論するが，n 次元空間(1)でも同様の議論はできる。

正の実数 ε に対し $U_\varepsilon(P)=\left\{Q\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, d(Q,P)<\varepsilon\right\}$ を P の ε-**近傍** (ε-neighborhood) という。$\mathbb{R}^2$ の部分集合を A とする。点 P のある ε-近

(1) $\mathbb{R}^n=\{(x_1,\dots,x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{R}(i=1,\dots,n)\}$ を n 次元空間と呼び，その元 $P=(x_1,\dots,x_n)$ を点と呼ぶ。2 点 $P=(x_1,\dots,x_n)$, $Q=(y_1,\dots,y_n)$ 間の距離を $d(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$ で定義する。

傍が A に含まれるとき，P を A の**内点** (*inner point*) という。A の内点全体の集合を $\mathring{A}$ と書く。P の ε–近傍で A と共通部分がないものが存在するとき，P を A の**外点** (*outer point*) という。A の外点でも内点でもない点を**境界点** (*boundary point*) といい，境界点全体の集合を ∂A と書く。

A に対し $\partial A \subseteq A$ となるとき，A を**閉集合** (*closed set*) という。$\partial A \cap A = \emptyset$ となるとき A を**開集合** (*open set*) という。

A が次の性質を持つとき**連結** (*connected*) であるという：任意の 2 点 $P, Q \in A$ に対し区間 $I = [a, b]$ から A への連続写像で $f(a) = P$, $f(b) = Q$ となるものが存在する。

連結な開集合を**領域** (*domain*) という。D が領域の時 $D \cup \partial D$ を $\overline{D}$ で表わしこれを**閉領域** (*closed domain*) という。（閉）領域がある円板 $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq M \right\}$ に含まれる時**有界** (*bounded*) であるという。

演習問題 ***2.1**　次の D に対し ∂D を求めよ。

(1) $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1 \}$

(2) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x < 1, -2 < y < \sin \dfrac{1}{x} \right\}$

(3) $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1, x \in (-15, 5), y \in (-15, 5) \}$

2.2　多変数関数

多変数関数は一般に独立変数が 2 個以上である関数をいうが，我々はもっぱら 2 変数関数に関して議論する (一部 3 変数関数も扱う)。一般の n 変数関数は以下の 2 の部分を n に変えるとほぼ同様に議論できる。一般に$\mathbb{R}^2$の部分集合 D で定義された関数を 2 変数関数と呼び，

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

と表わす。多変数関数は 1 変数関数と異なりグラフ[(1)]があまり役にたたない。独立変数が 2 個の時は辛うじてグラフが書けるが 3 次元的なのでわかりにくいし，変数の個数が多くなると書けなくなる。

定義 2.3 [極限] D で定義された関数

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

を考える。$P = (x, y)$ を限りなく $P_0 = (a, b)$ に近づけた時 (即ち $d(P, P_0) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ を限りなく 0 に近づける時)，$f(P) = f(x, y)$ が限りなくある値 A に近づく ($|f(P) - A|$ が限りなく 0 に近づく) とする。このとき

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A, \qquad \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = A, \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A$$

---

(1) ここでグラフとは $G_f = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, z = f(x, y) \}$ のこと。

$$f(P) \longrightarrow A \quad (P \longrightarrow P_0), \qquad f(x,y) \longrightarrow A \quad ((x,y) \longrightarrow (a,b))$$

などと書き，P を P_0 に近づけた時の $f(P)$ の極限と言う[(2)]。

1 変数関数の極限と同様の定理が成立する。

定理 2.4 (1) **和・定数倍・積・商の極限**

1) $\displaystyle\lim_{P\to P_0}(f(P)+g(P)) = \lim_{P\to P_0} f(P) + \lim_{P\to P_0} g(P)$

2) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} kf(P) = k\lim_{P\to P_0} f(P)$

3) $\displaystyle\lim_{P\to P_0}(f(P)\cdot g(P)) = \lim_{P\to P_0} f(P)\cdot\lim_{P\to P_0} g(P)$

4) $\displaystyle\lim_{P} g(P) \neq 0$ の時，$\displaystyle\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\displaystyle\lim_{P\to P_0} f(P)}{\displaystyle\lim_{P\to P_0} g(P)}$

(2) **不等式**　$f(P) \leqq g(P)$ の時，$\displaystyle\lim_{P\to P_0} f(P) \leqq \lim_{P\to P_0} g(P)$

(3) **はさみうちの定理**　$f(P) \leqq g(P) \leqq h(P)$ の時 $\displaystyle\lim_{P\to P_0} f(P) = \lim_{P\to P_0} h(P) = A$ であれば $\displaystyle\lim_{P\to P_0} g(P)$ も収束して極限値は A。

演習問題 ****2.2**　定理 2.4 を証明せよ。

例 2.5

(1) $\displaystyle f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $((x,y)\neq(0,0))$ は $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ である。何故なら $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と極座標表示してみる。$(x,y)\to(0,0)$ という事は θ が色々な変化をしながら $r \to 0$ となる事を意味する。$f(x,y)$ を極座標で書き直すと $\displaystyle f(x,y) = \frac{r\cos\theta r\sin\theta}{r} = r\cos\theta\sin\theta$ となり，これは $r\to 0$ のとき $f(x,y)\to 0$ となる。

(2) $\displaystyle f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$ に関して考える。同様に極座標で書き直すと $\displaystyle f(x,y) = \frac{r\sin\theta r\cos\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$ なので，θ の変化に依存する。例えば $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ を保ちながら

---

(2) ε-δ 論法できちんと書くと

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall P\in D\ \ 0<d(P,P_0)<\delta \implies |f(P)-f(P_0)|<\varepsilon$$

となる。

$(x, y) \to (0,0)$ とすると $f(x, y)$ は $\dfrac{1}{2}$ に収束するし，$\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ を保ちながら $(x, y) \to (0,0)$ とすると $f(x, y)$ は $-\dfrac{1}{2}$ に収束する。多変数の収束の定義は**近付き方によらず**一定の値に収束する事なので，この場合収束しない。

注意 2.6 多変数の極限と累次極限を混同しないように。例 2.5 (2) は累次極限は存在する。ここで類似極限とは

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y)$$

の様な形の極限である。上の例でいうと最初に y を b に近づけ，次に x を a に近づけるものである。それに対し多変数の極限は x と y を同時に近づけるものである。多変数の極限が存在すれば累次極限は存在するが，逆は正しくない。

演習問題 2.3 次の極限値が存在するかどうかを調べ，存在するときは極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2 + 2}{x + y - 1}$　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^3 + (y-1)^3}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$　(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}$

定義 2.7 D で定義された関数 $f(P) = f(x, y)$ が点 $P_0 = (a, b)$ で**連続である** (*continuous*) とは

$$\lim_{P\longrightarrow P_0} f(P) = f(P_0), \quad \text{または} \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b),$$

が成立する事を言う。定義域 D の各点で連続の時 $f(P)$ は D で連続であるという。この時 f を単に**連続関数** (*continuous function*) という。

連続関数の和，差，積，商，合成関数等が連続関数になるのは 1 変数関数と同じである。最大値定理に対応するのが次の命題である。

定理 2.8 [**最大値定理**] 有界閉集合で定義された連続関数は最大値をとる。

演習問題 ***2.4**　定理 2.8 を証明せよ。

1 変数関数の場合最大値定理を用いなくても，増減表を用いる事により最大・最小を用いる事ができた。多変数関数では最大・最小の問題をきちんと扱おうとするとこの定理は不可欠になる。

2.3　偏微分

1 変数関数の微分の場合,「導関数が存在する」という事と「接線が存在する」という事は同じであった。しかし 2 変数以上で微分を考えると 2 つは異なる概念となる。定義 2.9 (偏微分可能性) は「導関数が存在する」事に対応する。定義 2.10 (全微分可能性) は「接線が存在する」事に対応する。この様に 1 変数関数では同じに見えた概念が 2 つに分裂する。微分法で基本的なのは後者 (全微分可能性) である。

1 変数関数	導関数の存在	$=$	接線の存在
多変数関数	偏導関数の存在 (偏微分可能)	$<$	接平面の存在 (全微分可能)

偏導関数とは 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，例えば x のみを変数と見て微分したものである。

定義 2.9 [偏導関数] 関数 $z=f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ において x に関して (y に関して) **偏微分可能**とは

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

$$\left(\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\right)$$

が収束する事を言う。この時この極限値を

$$\frac{\partial f}{\partial x}\quad \frac{\partial z}{\partial x}\quad f_x\quad z_x$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\quad \frac{\partial z}{\partial y}\quad f_y\quad z_y\right)$$

と書く。x に関しても y に関しても偏微分可能の時，単に偏微分可能と言う。各点で偏微分可能の時 1 変数と同じ様に導関数を考える事ができる。これらを x に関する (y に関する) **偏導関数**と言う。

偏微分可能という条件は弱い条件である。偏微分可能であるが連続でない例が存在する。次の関数は原点で偏微分可能であるが連続ではない。

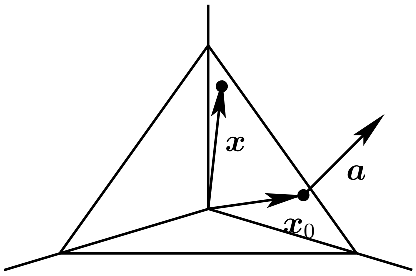
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

演習問題 2.5　上の関数が原点において連続でない事を示せ。また原点における偏導関数を求めよ

1 変数の「接線が存在する」という概念は 2 変数関数では「接平面が存在する」となる。定義 2.10 がそれに対応する。

全微分可能の定義の前に空間内の平面の方程式について復習しておこう。

空間内の平面は 1 次式で表される。逆に 1 次式で表される空間内の図形は平面である。



空間内の平面を L とする。L 上に 1 点をとり，その位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ とする。L と直交するベクトル (法線ベクトル) を $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ とする。L 上の任意の点に対しその位置ベクトルを $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ とすると，ベクトル $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ とベクトル $\boldsymbol{a}$ は直交しているので内積は 0 である。

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a}) &= (x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c \\ &= ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0\end{aligned}$$

$d = ax_0 + by_0 + z_0$ とおくと

$$L = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d \,\}$$

となる。この議論を逆にたどると 1 次式で表される図形が平面であることが分かる。

平面が $z=ax+by+c$ と表されているとする。$y=0$ は xz-平面を表すが，平面との共通部分は直線 $z=ax+c$ で与えられる。この様に係数 a は xz-平面との共通部分の直線の傾きを表す。b も同様である。

定義 2.10 [全微分可能] $f(x,y)$ は点 (a,b) のまわりで定義されていて，(a,b) で偏微分可能[(1)]とする。

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-\left(f(a,b)+\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)k\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおく。$f(x,y)$ が (a,b) で**全微分可能**とは

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$$

となる時をいう。全微分可能を単に**微分可能**という場合もある。

定義 2.10 でいうと，$(a,b)+\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)k$ が接平面を表している。(ここでは h,k を変数と見ている。) 条件は関数と平面の差が非常に小さくなる事を意味している。

全微分可能を直接示すのは面倒な場合もあるが，次の定理が成立するので，我々の扱う多くの関数は全微分可能である事が分かる。

定理 2.11 f_x, f_y が存在して，そのいずれかが連続なら f は全微分可能である。

演習問題 *__2.6__ 定理 2.11 を証明せよ。

演習問題 2.7 演習問題 2.5 の関数は原点で全微分可能でない事を示せ。

---

(1) 偏微分可能性は仮定しなくても，全微分可能性から従うが，ここでは叙述の簡易化のため仮定しておく。

解析学 I 要綱 #7

2.4 合成関数の導関数

積の微分法は偏微分でも 1 変数と同様であるが合成関数の導関数は 1 変数と異なるので特に注意が必要である。

定理 2.12

$$(f(x,y)g(x,y))_x = f(x,y)_x \cdot g(x,y) + f(x,y) \cdot g(x,y)_x$$
$$(f(x,y)g(x,y))_y = f(x,y)_y \cdot g(x,y) + f(x,y) \cdot g(x,y)_y$$

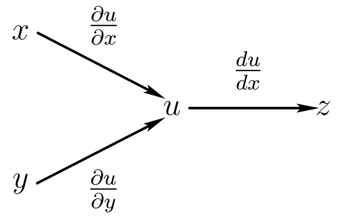
命題 2.13 $z = z(u), u = u(x,y)$ が微分可能のとき

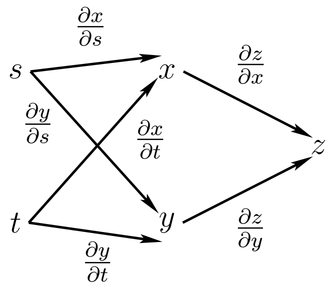
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y}$$

定理 2.14 $z = z(x,y), x = x(s,t), y = y(s,t)$ は微分可能とする。このとき $z(x(s,t),y(s,t))$ を s で微分した偏導関数および $z(x(s,t),y(s,t))$ を t で微分した偏導関数は次で与えられる。

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

命題 2.13 および定理 2.14 がそれぞれどのような場合に適用されるかは変数間の関係を見ることで分かる。例えば z を s で微分するとき，s から z へ向かうすべての経路を考える。それぞれの経路について，その辺上の導関数をかけ，すべての経路に関して和をとると，求める導関数が得られる。





演習問題 2.8　定理 2.12 を示せ。

演習問題 *2.9　命題 2.13 を示せ。

演習問題 *2.10　定理 2.14 を示せ。

$z = z(x,y) = \sin(x^2y^2)\log(x^3+y^3)$ の導関数を求めてみよう。積の微分法を用いると

$$\begin{aligned} z_x &= \left(\sin\left(x^2y^2\right)\log\left(x^3+y^3\right)\right)_x \\ &= \left(\sin\left(x^2y^2\right)\right)_x \log\left(x^3+y^3\right) + \sin\left(x^2y^2\right)\left(\log\left(x^3+y^3\right)\right)_x \end{aligned}$$

となる。$u = x^2y^2$ とおくと $u_x = 2xy^2$ なので

$$\left(\sin\left(x^2y^2\right)\right)_x = \frac{d}{du}\sin u \cdot u_x = 2xy^2\cos\left(x^2y^2\right)$$

となる。$u = x^3+y^3$ とおくと $u_x = 3x^2$ なので

$$\left(\log\left(x^3+y^3\right)\right)_x = \frac{d}{du}\log u \cdot u_x = \frac{3x^2}{x^3+y^3}$$

となる。よって

$$z_x = 2xy^2\cos\left(x^2y^2\right)\log\left(x^3+y^3\right) + \frac{3x^2\sin\left(x^2y^2\right)}{x^3+y^3}$$

演習問題 2.11　次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $z = x^3 - 3xy + y^3$

(2) $z = (x^3+y^4)^{100}$

(3) $z = \dfrac{x-y}{2x+3y}$

(4) $z = \sqrt{x^2+y^2}$

(5) $e^{ax^2+by^2}$

(6) $z = x\arctan\dfrac{x}{y}$

(7) $z = xy\sin(x^2+y^2)$

(8) $z = x^2y^2\log(x^3+y^3)$

(9) $z = xy\arcsin\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(10) $z = x^xy^yx^yy^x$

関数 $z = f(x,y)$ の導関数 f_x, f_y が偏微分可能のとき更に導関数を考える事ができる。f_x の x に関する導関数 $(f_x)_x$ および y に関する導関数 $(f_x)_y$ をそれぞれ

$$f_{xx},\quad f_{xy}$$

と書く。また f_y の導関数も同様に定義できる。これらを 2 階の偏導関数 (2 次偏導関数) と呼ぶ。$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ の表し方で言うと，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を x で

微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ と書く。同様に $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を y で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ と書く。$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を x で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 表す。$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を y で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ と表す。3 階以上の偏導関数も同様に定義される。

$z = f(x, y)$ の 2 階の偏導関数は 4 つあり

$$z_{xx}, \quad z_{xy}, \quad z_{yx}, \quad z_{yy}$$

あるいはライプニッツ流に書くと

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

である。$z = f(x, y)$ の 3 階の偏導関数は 8 つあり

$$z_{xxx}, \quad z_{xxy}, \quad z_{xyx}, \quad z_{xyy}, \quad z_{yxx}, \quad z_{yxy}, \quad z_{yyx}, \quad z_{yyy}$$

あるいはライプニッツ流に書くと

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

である。

f_{xy} は f を最初は x で微分し次に y で微分したものである。f_{yx} は f を最初は y で微分し次に x で微分したものであり，この 2 つは一般に違うものである。しかしある条件の元では一致する。このことについては後 (2.6 節) で取り上げる。

演習問題 2.12　次の関数について z_s, z_t および $z_{ss}, z_{st}, z_{ts}, z_{tt}$ を求めよ。

(1) $z = \sin x \cos y, x = s^2 - t^2, y = 2st$
(2) $z = \sin(x^2 + y^2), x = s + t, y = st$
(3) $z = \sin(x + 2y), x = \dfrac{t}{s}, y = \dfrac{s}{t}$

逆関数がでてくる場合は次の形の様に行列で考えた方が分かりやすいかもしれない。

定義 2.15 2 変数関数の組 $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ に対し

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

をこの関数（の組）の**ヤコビ行列**といい，この行列の行列式を

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \det\left(\frac{D(x,y)}{D(s,t)}\right)$$

で表わし，**ヤコビアン** (**ヤコビ行列式**) という。ヤコビ行列を用いると定理 2.14 は次のように書き直すことができる。

定理 2.16 2 つの関数の組 $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ と $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$ に対し

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\frac{D(u,v)}{D(s,t)}$$

が成立する。

特に逆関数に関しては

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1}$$

となる。

演習問題 2.13 定理 2.14 から定理 2.16 を導け。

演習問題 2.14 次の場合に $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 及び $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = u^2$
(2) $x = u^2 - v^2, y = 2uv$
(3) $x = u\cos v, y = u\sin v$
(4) $x = u, y = u + v$

演習問題 2.15 次の関数に対し $\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $z = x + y^2, s = x + y, t = xy$
(2) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = x^2y^2$
(3) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = xy$
(4) $z = x + y, s = x^2 - y^2, t = 2xy$
(5) $z = xy, s = x, t = x + y$
(6) $z = xy, s = x\cos y, t = x\sin y$

演習問題 2.16 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする (2 次元の極座標表示)。ヤコビ行列 $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}$ およびヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算し，関数 $z = f(x,y)$ に対し次を示せ。

(1) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$

演習問題 2.17

(1) $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$, $y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ (α は定数) のとき次を示せ。

(1) $z_x^2 + z_y^2 = z_u^2 + z_v^2$
(2) $z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv}$

(2) $x + y = e^{u+v}$, $x - y = e^{u-v}$ に対し $z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} - z_{vv})$ が成立することを示せ。

(3) $x + y = u$, $y = uv$ ならば $xz_{xx} + yz_{xy} + z_x = uz_{uu} - vz_{uv} + z_u$ となる事を示せ。

2.5　3 変数関数の微分

今まで 2 変数関数の微分について学んだ。ここでは 3 変数関数について見る。2 変数関数の場合とほとんど平行に議論が進む事が確認出来る。

定義 2.17 関数 $y = f(x_1, x_2, x_3)$ が $(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3)$ で x_1 に関して**偏微分可能**とは

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)}{h}$$

が収束する事を言う。x_2, x_3 に関しても同様に定義できる。

x_1, x_2 及び x_3 に関して偏微分可能の時，単に**偏微分可能**と言う。各点で偏微分可能の時 1 変数と同じ様に導関数を考える事ができる。これらを x_1 に関する (または x_2, x_3 に関する) 偏導関数と言う。x_1 に関する偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} \quad f_{x_1} \quad z_{x_1}$$

等書かれる。

3 変数関数の場合全微分可能性は幾何的には「接空間の存在」を意味する。

定義 2.18 $y=f(x_1,x_2,x_3)$ は点 (a_1,a_2,a_3) のまわりで定義されていて，(a_1,a_2,a_3) で偏微分可能[(1)]とする。

$$\varepsilon(h_1,h_2,h_3)=$$
$$\frac{f(a_1+h_1,a_2+h_2,a_3+h_3)-f(a_1,a_2,a_3)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2,a_3)h_1-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2,a_3)h_2-\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1,a_2,a_3)h_3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$$

とおく。$f(x_1,x_2,x_3)$ が (a_1,a_2,a_3) で**全微分可能**とは

$$\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)}\varepsilon(h_1,h_2,h_3)=0$$

となる時をいう。

合成関数に関しても 2 変数と同様の結果が成立する。

定理 2.19 $y=f(x_1,x_2,x_3)$, $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t)$, $x_3=x_3(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial z}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}$$

定義 2.20 3 変数関数 3 個の組 $x_1=x_1(t_1,t_2,t_3)$, $x_2=x_2(t_1,t_2,t_3)$, $x_3=x_3(t_1,t_2,t_3)$ に対し

$$\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(t_1,t_2,t_3)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}&\frac{\partial x_1}{\partial t_2}&\frac{\partial x_1}{\partial t_3}\\\frac{\partial x_2}{\partial t_1}&\frac{\partial x_2}{\partial t_2}&\frac{\partial x_2}{\partial t_3}\\\frac{\partial x_3}{\partial t_1}&\frac{\partial x_3}{\partial t_2}&\frac{\partial x_3}{\partial t_3}\end{pmatrix}$$

をこの関数 (の組) のヤコビ行列という。この行列の行列式を

$$\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(t_1,t_2,t_3)}=\det\left(\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(t_1,t_2,t_3)}\right)$$

で表し，ヤコビアンという。

定理 2.21 3 つの関数の組 $x_1=x_1(u_1,u_2,u_3)$, $x_2=x_2(u_1,u_2,u_3)$, $x_3=x_3(u_1,u_2,u_3)$ と
$u_1=u_1(t_1,t_2,t_3)$, $u_2=u_2(t_1,t_2,t_3)$, $u_3=u_3(t_1,t_2,t_3)$ に対し

$$\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(t_1,t_2,t_3)}=\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(u_1,u_2,u_3)}\frac{D(u_1,u_2,u_3)}{D(t_1,t_2,t_3)}$$

[(1)]2 変数と同様で，偏微分可能を仮定しなくても定義できるが，叙述の簡単化のため偏微分可能を仮定する。

が成立する。特に逆関数に関しては

$$\frac{D(u_1,u_2,u_2)}{D(x_1,x_2,x_3)} = \left(\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(u_1,u_2,u_3)}\right)^{-1}$$

となる。

演習問題 2.18　次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $w = f(x,y,z) = x^2y^3z^4$　　(2) $w = xyz\sin(x^2+y^2+z^2)$
(3) $e^{x^2+y^3+z^4}$　　(4) $x^2y^3\log(x^2+y^3+z^4)$

演習問題 2.19　次の場合に $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ 及び $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = w^2, z = u^2$
(2) $x = u^2 - v^2 + w^2, y = 2uv, z = 2uw$
(3) $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u + w$
(4) $x = u, y = u + v, z = u + v + w$

演習問題 2.20　次の関数に対し $\dfrac{\partial w}{\partial s}, \dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s\partial t}$ を求めよ。

(1) $w = x^3 + y^3 + z^3$,$x + y + z = s, xy + yz + zx = t, xyz = u$
(2) $w = x + y + z$,$x^2 + y^2 + z^2 = s, xyz = t, xy + yz + zx = u$

演習問題 2.21　$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ とする (3 次元の極座標表示)。関数 $w = f(x,y,z)$ に対し次を示せ。

(1) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ を計算せよ。

(2) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$

(3) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial w}{\partial\varphi}$

解析学 I 要綱 #8

2.6 高階偏導関数とテーラーの定理

f_{xy} は f を最初は x で微分し次に y で微分したものである。f_{yx} は f を最初は y で微分し次に x で微分したものであり，この 2 つは一般に違うものである。しかしある条件の元では一致する。

定理 2.22 [シュワルツの定理] 点 (a,b) の近傍で，f_x, f_y, f_{xy} が存在して，f_{xy} が (a,b) で連続ならば，f_{yx} も存在して $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ が成立する。

演習問題 *2.22 定理 2.22 を証明せよ。

定義 2.23 関数 $f(x,y)$ に対し f_x および f_y が存在して共に連続であるとき関数 $f(x,y)$ は C^1 **級**であるという。定理 2.11 より C^1 級であれば全微分可能である。

f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} および f_{yy} が存在してすべての 2 階の偏導関数が連続のとき関数 $f(x,y)$ は C^2 **級**であるという。f が C^2 級のとき定理 2.22 より $f_{xy} = f_{yx}$ が成立する。

関数 $f(x,y)$ が n 階までの導関数がすべて存在して連続であれば C^n **級**であるという。関数 $f(x,y)$ が C^n 級であれば，n 階までの導関数は x,y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る ($\to$ 演習問題 2.23)。

演習問題 2.23 定理 2.22 を仮定して次を示せ。

(1) $z = f(x,y)$ が C^3 級ならば

$$z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}, \quad z_{yyx} = z_{yxy} = z_{xyy}$$

が成立する。

(2) * $z = f(x,y)$ が C^n 級であるとする。α を x または y が k 個 $(0 \leqq k \leqq n-2)$ 並んだもの，β を x または y が $n-k-2$ 個並んだものとすると

$$z_{\alpha xy\beta} = z_{\alpha yx\beta}$$

が成立する。例えば $\alpha = xy, \beta = yy$ のときは $z_{xyxyyy} = z_{xyyxyy}$ を意味する。

(3) * $z = f(x,y)$ が C^n 級ならば n 階の導関数は x,y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

以下この節では関数は**何回でも微分できる**ことを仮定し，それを特に断らないことにする。

多変数のテーラーの定理を述べるために次の記号を導入する。

定義 2.24 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ を独立したものとして扱い $\dfrac{\partial}{\partial x}f$ は $\dfrac{\partial}{\partial x}$ が f に作用していると見なす。このとき形式的に $D = h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}$ と定義し，Df を $Df = h\dfrac{\partial}{\partial x}f+k\dfrac{\partial}{\partial y}f$ と定義する。また $D^2 = \left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ なので

$$D^2 f = \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f$$

と考える。一般に $D^n = \left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^{n-r}k^r\frac{\partial^n}{\partial x^{n-r}\partial y^r}$ なので

$$D^n f = \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^{n-r}k^r\frac{\partial^n}{\partial x^{n-r}\partial y^r}f$$

と考える。

定理 2.25 [**テーラーの定理**]

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}D^j f(a,b)+\frac{1}{n!}D^n f(a+\theta h,b+\theta k) \\ &= f(a,b)+Df(a,b)+\cdots+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}f(a,b) \\ &\qquad +\frac{1}{n!}D^n f(a+\theta h,b+\theta k) \end{aligned}$$

となる θ $(0<\theta<1)$ が存在する。$n=1$ の場合 (2 変数関数の) 平均値の定理と呼ばれる。

1 変数の定理の場合と同様に，定理の $\dfrac{1}{n!}D^n f(a+\theta h,b+\theta k)$ の項を剰余項といい R_n で表す。

演習問題 ***2.24**　定理 2.25 を証明せよ。

定理 2.25 は D という記号を用いて記述しているので，1 変数の定理と同じ様に見えるが，書き下してみると 1 変数よりも複雑であ

る。$n=3$ のときに定理を D という記号を用いないで書く。

$$D^0f=f \qquad Df=hf_x+kf_y$$
$$D^2f=h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy} \qquad D^3f=h^3f_{xxx}+3h^2kf_{xxy}+3hk^2f_{xyy}+k^3f_{yyy}$$

なので

$$\begin{aligned}
f(a+h,b+k)=&f(a,b)+hf_x(a,b)+kf_y(a,b)\\
&+h^2f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2f_{yy}(a,b)\\
&+h^3f_{xxx}(a+\theta h,b+\theta k)+3h^2kf_{xxy}(a+\theta h,b+\theta k)\\
&+3hk^2f_{xyy}(a+\theta h,b+\theta k)+k^3f_{yyy}(a+\theta h,b+\theta k)
\end{aligned}$$

となる。

演習問題 2.25　$n=4$ のとき定理 2.25 を D を用いないで記述せよ。また $n=5$ のときも記述せよ。

ここでは剰余項を無視した近似を考える。

関数は $z=f(x,y)=x^2e^y$ で点は $(a,b)=(1,1)$ とする。最初に $n=2$ の場合を考える。$f_x=2xe^y$, $f_y=x^2e^y$ なので $f(1,1)=e$, $f_x(1,1)=2e$, $f_y=e$ である。よって

$$f(1+h,1+k)\fallingdotseq e+2eh+ek$$

である。これは関数 f を $(1,1)$ の周りで h,k に関する 1 次式で近似している式である (今の場合は接平面の方程式)。1 変数のときと同じように「近似の最もよい 1 次式」を定義する。$x=a+h, y=b+k$ とする。

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-(A+Bh+Ck)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおく。$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成立するとき，$A+Bh+Ck$ は (a,b) で $f(x,y)=f(a+h,b+k)$ を「最もよく近似する」1 次式と呼ぶ。この例でいうと $e+2eh+ek$ は $(a,b)=(1,1)$ で $f(x,y)=x^2e^y$ を最もよく近似する 1 次式である (証明は演習問題 2.27)。

$n=3$ の場合は

$$f(1+h,1+k)\fallingdotseq e+2eh+ek+eh^2+2ehk+\frac{1}{2}ek^2$$

この式は 2 次式による近似になっている。

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-(A+Bh+Ck+Dh^2+Ehk+Fk^2)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2}$$

とおく。$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立するとき，$A+Bh+Ck+Dh^2+Ehk+Fk^2$ は (a,b) で $f(x,y) = f(a+h, b+k)$ を「最も よく近似する」2 次式と呼ぶ。この例でいうと $e+2eh+ek+eh^2+2ehk+\dfrac{1}{2}ek^2$ は $(a,b) = (1,1)$ で $f(x,y) = x^2e^y$ を最もよく近似する 2 次式である (証明は演習問題 2.27)。

n を大きくしていくと高い次数の式による近似になり，一般に近似が良くなるのは 1 変数の場合と同様である。$g(h,k)$ を h, k に関する n 次式とする。

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(a+h, b+k) - g(h,k)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n}$$

とおく。$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立するとき，$g(h,k)$ は (a,b) で $f(x,y)$ を「最もよく近似する」n 次式と呼ぶ。この定義とテーラーの定理との関連については演習問題 2.27 参照のこと。

1 変数の場合と同様に 2 変数でも級数展開が考えられるがこの講義では取扱わない。極値問題への応用は次節で扱う。

演習問題 2.26　次の関数を (a,b) において最もよく近似する 1 次式，2 次式および 3 次式求めよ。ただし演習問題 2.27 の結果は用いてもよい。

(1) $z = f(x,y) = (x-1)(y+2) \quad (a,b) = (0,0)$

(2) $z = f(x,y) = \dfrac{1}{1-2x+3y} \quad (a,b) = (0,0)$

(3) $z = f(x,y) = \sin(x+y) \quad (a,b) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

演習問題 *2.27

(1) $f(a,b) + Df(a,b)$ が (a,b) で $f(x,y)$ を最もよく近似する 1 次式であることを示せ。

(2) $f(a,b) + Df(a,b) + \dfrac{1}{2!}D^2f(a,b)$ が (a,b) で $f(x,y)$ を最もよく近似する 2 次式であることを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} D^j f(a,b)$ が (a,b) で $f(x,y)$ を最もよく近似する n 次式であることを示せ。

解析学 I 要綱 #9

2.7 極値

ある点 (a,b) の周りで $f(a,b)$ の値が他の $f(x,y)$ より大きいとき (a,b) を**極大点**といい，$f(a,b)$ を**極大値**という。正確に言うと，ある正数 δ が存在して，任意の (x,y) に対し $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ ならば $f(x,y)<f(a,b)$ が成立しているとき，(a,b) を**極大点**といい，$f(a,b)$ を極大値という。

逆に他の値より小さいとき (a,b) を**極小点**といい，$f(a,b)$ を**極小値**という。極大点または極小点を**極点**と呼び，極大値または極小値を**極値**という。

極値の定義において $f(x,y)<f(a,b)$ を $f(x,y)\leqq f(a,b)$ に置き換えた概念を**広義の極大**といい，$f(a,b)$ を**広義の極大値**という。広義の極小も同様に定義できる。

関数 $z=f(x,y)$ が $f_x(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)=0$ を満たすとき，点 (a,b) を関数 $z=f(x,y)$ の**臨界点**と呼ぶ。1 変数関数と同様に $z=f(x,y)$ が点 (a,b) で (広義の) 極値をとれば，(a,b) が臨界点である事が分かる。即ち次が成立する。

命題 2.26 (a,b) で f の (広義の) 極点ならば，(a,b) は f の臨界点である。

証明 f が (a,b) で広義の極大値をとるときのみ証明する。極小値も同様に示すことができる (→ 演習問題 2.28)。ある $\delta>0$ が存在して $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ ならば $f(a,b)\geqq f(x,y)$ が成立しているので，絶対値が十分小さい h,k に対し

$$f(a+h,b)\leqq f(a,b),\qquad f(a,b+k)\leqq f(a,b)$$

が成立している。$h>0$ のとき $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\leqq 0$ が成立しているので，

$$f_x^+(a,b)=\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\leqq 0$$

$h<0$ のとき $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\geqq 0$が成立しているので，

$$f_x^-(a,b)=\lim_{h\to-0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\geqq 0$$

よって $f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=0$ となる。

$k>0$ のとき $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\leqq 0$ が成立しているので，

$$f_y^+(a,b)=\lim_{h\to +0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\leqq 0$$

$k<0$ のとき $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\geqq 0$ が成立しているので，

$$f_y^-(a,b)=\lim_{h\to -0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\geqq 0$$

よって $f_y(a,b)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}=0$ となる。∎

演習問題 2.28 (a,b) で f が (広義の) 極小値をとるならば，(a,b) は f の臨界点であることを示せ。

例 2.27 典型的な，極点，臨界点の例をあげよう。
(1) $z=f(x,y)=x^2+y^2$ とすると，$(0,0)$ は極小点である。

$P_0=(0,0)$ で関数は $f(P_0)=0$ であるが，$P=(x,y)\neq P_0$ のとき $x-2+y^2>0$ なので $f(P)>0$ である。よって $f(P)>f(P_0)$ が成立している。
(2) $z=f(x,y)=-x^2-y^2$ とすると $(0,0)$ は極大点である。これは (1) と同様に示される。
(3) $z=f(x,y)=x^2-y^2$ とする。$(0,0)$ は臨界点であるが，極点ではない。

$z_x=2x, z_y=-2y$ なので $(0,0)$ は臨界点である。

$(0,0)$ が極大点だと仮定すると $(0,0)$ の十分近くの (x,y) に対し $f(x,y)<f(0,0)=0$ でなくてはならない。しかし $(0,0)$ の十分近くの $(x,0)$ に対して $f(x,0)=x^2>0$ となる。よって極大点ではない。

$(0,0)$ が極小点だと仮定すると $(0,0)$ の十分近くの (x,y) に対し $f(x,y)>f(0,0)=0$ でなくてはならない。しかし $(0,0)$ の十分近くの $(0,y)$ に対して $f(0,y)=-y^2<0$ となる。よって極小点ではない。

例 2.27 からも分かるように,「臨界点ならば極値である」は一般に正しくない。極値を判定するため次を定義する。関数 $z=f(x,y)$ に対し

$$H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-\big(f_{xy}(x,y)\big)^2=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}$$

を $z = f(x,y)$ の**ヘッシャン** (Hessian) と呼ぶ。ここで $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ は行列式を表す。このとき次が成立する。

定理 2.28 (a,b) を関数 $z = f(x,y)$ の臨界点とするとき，次が成立する。

(1) $H(a,b) > 0$ のとき (a,b) は $f(x,y)$ の極点である。

  1) $f_{xx}(a,b) > 0$ のとき $f(a,b)$ は極少値である。

  2) $f_{xx}(a,b) < 0$ のとき $f(a,b)$ は極大値である。

(2) $H(a,b) < 0$ のとき (a,b) は極点でない。

(3) $H(a,b) = 0$ のときはこれだけでは分らない。極点になる場合もならない場合もある。

例 2.29 例 2.27 に関して定理 2.28 が成立していることを見よう。最初に $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ を考える。

$$f_x = 2x, \quad f_y = 2y, \quad f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 2$$

なので，ヘッシャンは

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

であり，$f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ となっている。定理によると，極小になるが，実際極小になっている。

次に $z = f(x,y) = -x^2 - y^2$ を考える。

$$f_x = -2x, \quad f_y = -2y, \quad f_{xx} = -2, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = -2$$

なので，ヘッシャンは

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

であり，$f_{xx}(0,0) = -2 < 0$ となっている。定理によると，極大になるが，実際極大になっている。

最後に $z = f(x,y) = x^2 - y^2$ を考える。

$$f_x = 2x, \quad f_y = -2y, \quad f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = -2$$

なので，ヘッシャンは

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-4<0$$

であり，定理によると極点にならないが，実際極点ではない。

演習問題 2.29　2 次関数 $z=f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ に対して定理 2.28 が成立することを示せ。(ヒント：$y\neq 0$ のとき関数を y^2 で割って，$t=\dfrac{x}{y}$ とおくと，2 次関数の判別式が使える。)

演習問題 *2.30　定理 2.28 を証明せよ。

例 2.30 $z=f(x,y)=x^4+y^4+2x^2y^2-2y^2$ の極点を調べよう。最初に極点候補となる臨界点を求めよう。$z_x=4x^3+4xy^2=0$, $z_y=4y^3+4x^2y-4y=0$ の共通解が求めるものになる。この連立方程式を実数の範囲で解くと $(x,y)=(0,0),(0,1),(0,-1)$ を得る。

$z_{xx}=12x^2+4y^2$, $z_{xy}=8xy$, $z_{yy}=12y^2+4x^2-4$ なので $H(0,\pm 1)=32>0$, $H(0,0)=0$ となる。定理 2.28 より，$(0,\pm 1)$ で極小点である。$H(0,0)=0$ なので $(0,0)$ の様子は定理 2.28 からは分からない。個別に調べなければならない。この場合は極点になりそうもないと当りをつけてそれを示す。

x–軸上に制限して考えると，$f(x,0)=x^4$ である。x–軸上では $(0,0)$ は極小，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より大きな値を取る点が存在する。y–軸上に制限すると $f(0,y)=y^4-2y^2$ でこの 4 次関数は y–軸上では $(0,0)$ で極大，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より小さい値を取る点が存在する。2 つを合わせると $(0,0)$ が極点でない事が分かる。

演習問題 2.31　次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z=x^2-xy+y^2-2x+3y+1$ (2) $z=x^2-5xy+2y^2+x-y-3$
(3) $z=x^3+2xy^2-3x^2-3y^2-1$ (4) $z=x^3-3xy+y^3$
(5) $z=xy(x^2+y^2-1)$ (6) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$
(7) $z=\dfrac{ax+by}{x^2+y^2+1}$ $(a\neq 0, b\neq 0)$
(8) $z=e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)$ $(a>b>0)$

最大値・最小値を与える点は広義の極値になっているので，最大値・最小値を求めるとき極値問題を適用できる。次の例を考える。

辺の和が一定の直方体の中で体積最大になるものを求めよ。

3 辺の長さを x, y, z とする。和が一定なので，それを 4ℓ とすると，$x+y+z=\ell$ である。体積を V とすると，$V = xyz = xy(\ell - x - y)$ である。V を x, y の関数と考えると，$\dfrac{\partial V}{\partial x} = y(\ell - 2x - y)$, $\dfrac{\partial V}{\partial y} = y(\ell - x - 2y)$ より，$\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0$ を連立させて解くと $x = y = \dfrac{\ell}{3}$ を得る。

この解法は一見よさそうに思われるが，良く考えてみると示しているのは『最大値が存在するならばそれは $x = y = \dfrac{\ell}{3}$ である』という事だけである。最大値の存在証明もするためには以前述べた次の定理を必要とする。

定理 2.8 [**最大値定理**] 有界閉集合で定義された連続関数は最大値・最小値をとる。

また次の命題も必要になる。

命題 2.31 領域 D で定義された関数が最大値をとるとき次のいずれかである。
(1) 領域の内部にある臨界点である。
(2) 境界上の点である。

演習問題 2.32 命題 2.31 を証明せよ。

上の問題についてもう一度最大値の存在証明も含めて解答しよう。そのためには有界閉集合の問題にする必要がある。つまり直方体だけでなく「つぶれた直方体」も考える必要が出て来る。$V = xy(\ell - x - y)$ とする $(\ell > 0)$。$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0, y \geqq 0, x + y \leqq \ell \}$ 上で V の最大値を求める問題を考える。D は有界閉集合で，V は連続関数なので最大値が存在する。境界上での値は $V = 0$ なので最大値は D の内部に存在する。よって広義の極値になっている。V の臨界点は $\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y} \right) = (0, 0)$ となるが，これを解くと $x = y = \dfrac{\ell}{3}$ となるので，これが求めるものである。

演習問題 2.33
(1) 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積最大のものを求めよ。
(2) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。

2.8 陰関数

高校時代に次の様な議論をしたかもしれない。

$x^2 + y^2 = 1$ を x で微分すると $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ なので，
$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ である。

式 $x^2 + y^2 = 1$ は明示的に関数を定義しているわけではないが，陰覆的に定義してると考える。この議論をきちんと述べよう。

定義 2.32 関数 $F(x, y)$ と $F(a, b) = 0$ となる点 (a, b) に対し，a の近傍(1)で定義された関数 $y = f(x)$ が存在して，1) 定義されている任意の x に対し $F(x, f(x)) = 0$，2) $b = f(a)$，が成立する時，F は点 (a, b) の近傍で，**陰関数** $y = f(x)$ を定めるという。またこの f を (a, b) の近傍で定まる陰関数という。

3 変数関数の場合は，関数 $F(x_1, x_2, y)$ と，$F(a_1, a_2, b) = 0$ となる点 (a_1, a_2, b) に対し，(a_1, a_2) の近傍(2)で定義された関数 $y = f(x_1, x_2)$ が存在して $F(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = 0$，$b = f(a_1, a_2)$ が成立する時，F は点 (a_1, a_2, b) において，**陰関数** $y = f(x_1, x_2)$ を定めるという。

定理 2.33 $F(x, y)$ に対し $F(a, b) = 0$，$F_y(a, b) \neq 0$ ならば a の近傍で陰関数 $y = f(x)$ が存在する。この時，F が C^r 級なら f も C^r 級。$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$ である。

$F(x_1, x_2, y)$ に対し $F(a_1, a_2, b) = 0, F_y(a_1, a_2, b) \neq 0$ ならば (a_1, a_2) の近傍で陰関数 $y = f(x_1, x_2)$ が存在する。この時，F が C^r 級なら f も C^r 級。$\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = -\dfrac{F_{x_1}}{F_y}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_2} = -\dfrac{F_{x_2}}{F_y}$ である。

演習問題 *2.34 定理 2.33 を証明せよ。

演習問題 2.35 次で与えられる陰関数に関し $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $F(x, y) = 1 - y + xe^y = 0$
(2) $F(x, y) = x^3y^3 + y - x = 0$
(3) $F(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$ (デカルトの正葉線)

---

(1)近傍とはある正数 δ に対し $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ となる集合の事。

(2)近傍とはある正数 δ に対し $\left\{(x, y) \,\middle|\, \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta\right\}$ となる集合の事。

解析学 I 要綱 #10

3　1 変数関数の不定積分と微分方程式

ここでは微分方程式を解くために必要な 1 変数関数の不定積分についてのみ扱う。定積分は解析学 II で扱うが，定積分と不定積分の違いに関して一言だけふれておく。高校では不定積分 (原始関数) を用いて定積分が定義されていた。これは便法と考えるべきで，厳密には正しい定義とは言えない。

不定積分は微分の逆として定義されるものであるが，定積分は求積法と関係して定義されるものであり，直接には不定積分とは無関係である。定義としては無関係の両者の関係にニュートン・ライプニッツが独立に気づいたとき微積分学が成立したといえる。この事は解析学 II で定積分の定義のときにもう一度ふれるが，この事をきちんと理解する事が積分の理論的把握のキーポイントである。

3.1　不定積分の定義と諸性質

数学序論で積分の基本的部分は学んでいるので，ここでは簡単に復習した後，数学序論で述べなかった幾つかの計算法について学ぶ。

関数 $F(x)$ が微分可能で

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

となるとき，$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数** (*primitive function*) または**不定積分** (*indefinite integral*) といい，

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

と表す。$f(x)$ を**披積分関数**と呼ぶ。原始関数は $f(x)$ から一意的に決まるものではないが，定数分の差しかないので，

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

のように表す。この C を積分定数と呼ぶ。前期の数学序論では混乱する場合を除き通常省略したが，微分方程式を扱う場合は積分定数を書く必要がある。微分方程式に入ったら積分定数は書くことにする。またこの章の以下の部分で関数は積分可能であることを仮定し，そのことをいちいち断らないこととする。

次の諸命題に関しては前期で学んだ。

命題 3.1 [**積分の線型性**]

(1) $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

命題 3.2 [**いくつかの関数の不定積分**]

(1) $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}(a \neq -1)$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$

(3) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$ (4) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$

(5) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$ (6) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$

定理 3.3 [**置換積分法**] $x = \varphi(t)$ とすると,

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

置換積分は色々な場合に色々な形の変数変換が考案されている。詳しくは 3.3 節で扱う。

定理 3.4 [**部分積分法**]

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

3.2 諸計算 I (有理関数の不定積分)

有理関数は積分を我々の知っている関数 (初等関数) で書く事ができることが知られている。積分方法を一般的に述べるのではなく, 具体例を取り上げて一般的な方法が分かる様に積分計算を実行する事にする。$I = \displaystyle\int \frac{x^4+x^3-x-4}{x^3-1}\,dx$ を例にとる。

(1) **仮分数を帯分数へ**

最初に分子の次数が分母の次数より大きければ帯分数の形にして分子の次数を小さくする。

$$x^4+x^3-x-4 = (x+1)(x^3-1)-3$$

より

$$\frac{x^4+x^3-x-4}{x^3-1} = x+1-\frac{3}{x^3-1}$$

となる。$x+1$ の不定積分は容易なので，$\dfrac{3}{x^3-1}$ の積分を求めればよい。

(2) **部分分数展開**

部分分数展開をするために分母を因数分解する。

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$\frac{3}{x^3-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

を満たす定数 a,b,c を見つける。分母を払うと

$$3=a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1) \tag{1}$$

が恒等的に成立している。a,b,c を見つける方法としてここでは係数比較法と代入法を紹介する。

係数比較法は式を展開して係数を比較する方法である。(1) 式を展開すると

$$3=(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c$$

となる。係数を比較すると 2 次の係数は 0，1 次の係数も 0，0 次の係数は 3 なので $a+b=0, a-b+c=, a-c=3$ である。これを解くと $a=1, b=-1, c=-2$ が得られる。

代入法は (1) の x に適当な値を代入する方法である。$x=1$ を代入すると

$$3=a(1^2+1+1)+(b1+c)(1-1)$$

となるので，$a=1$ が得られる。$a=1$ なので (1) 式は

$$3=x^2+x+1+(bx+c)(x-1)$$

となるが移行して

$$x^2+x-2+(bx+c)(x-1)=(x-1)(x+2)+(bx+c)(x-1)=0$$

となる。$x-1$ で両辺を割ると

$$x+2+(bx+c)=0$$

が恒等的成立するので $b=-1, c=-2$ となる。

よって

$$\int\frac{3}{x^3-1}\,dx=\int\frac{1}{x-1}\,dx-\int\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx$$

(3) **積分の実行**

$\displaystyle\int \frac{1}{1\,\text{次式}}\,dx$ の積分は容易である。実数の範囲で因数分解できない 2 次式に対し，

$$x^2+x+1 \longrightarrow t^2+a$$

と 2 次式を 1 次の項がない形に変形する。$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ となるので $t=x+\dfrac{1}{2}$ と変数変換すると $\dfrac{dt}{dx}=1$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{\left(t-\dfrac{1}{2}\right)+2}{t^2+\dfrac{3}{4}}\frac{dx}{dt}\,dt\\ &= \int \frac{t}{t^2+\dfrac{3}{4}}\,dt+\frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+\dfrac{3}{4}}\,dt\end{aligned}$$

となる。前者は $u=t^2+\dfrac{3}{4}$ とおくと $\dfrac{du}{dt}=2t$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{t^2+\dfrac{3}{4}}\,dt &= \int \frac{t}{u}\frac{dt}{du}\,du=\int \frac{2t}{u}\frac{1}{2t}\,du\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du=\frac{1}{2}\log|u|\\ &= \frac{1}{2}\log\left(t^2+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)\end{aligned}$$

後者は

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x$$

に帰着させる。

$t^2+\dfrac{3}{4}=t^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ なので $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}u$ とおくと $\dfrac{dt}{du}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2+\dfrac{3}{4}}\,dt &= \int \frac{1}{\dfrac{3}{4}u^2+\dfrac{3}{4}}\frac{dt}{du}\,du=\int \frac{1}{\dfrac{3}{4}u^2+\dfrac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}\,du\\ &= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan u\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

以上を合わせると

$$
I = \frac{x^2}{2} + x - \log|x-1| + \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}
$$

(4) **少し理論的に**

任意の有理関数の不定積分が初等関数で表されるかどうかを考えてみる。

一般の有理関数を $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ とする。(1) の操作で分子の次数は分母の次数より小さいと仮定してよい。

次に部分分数展開をするため $g(x)$ の因数分解を実行する。アルゴリズムは存在しないが，実数の範囲で 1 次式または 2 次式に因数分解される事が知られている (代数学の基本定理)。$g(x) = g_1(x)g_2(x)$ と分解されて，$g_1(x)$ と $g_2(x)$ が共通因数を持たない場合

$$
\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}
$$

と部分分数展開できることが知られている。このときそれぞれの分子の次数はそれぞれの分母の次数より小さい。

同じ因数が 2 個以上存在する場合もあるので，部分分数展開を実行すると，次の形の関数の和になっている。

$$
\frac{f_1(x)}{(x+a)^n}, \qquad \frac{f_2(x)}{(x^2+ax+b)^n}
$$

分母が $(x^2+ax+b)^n$ の場合は変数変換することにより，$(x^2+a^2)^n$ と仮定してよい。分子を $(x+a)$ または (x^2+a^2) で展開することができる。即ち

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x+a)^k \\
&= a_0 + a_1(x+a) + \cdots + a_{n-1}(x+a)^{n-1} \\
f_2(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} (b_k x + c_k)(x^2+a^2)^k
\end{aligned}
$$

$$= (b_0x + c_0) + (b_1x + c_1)(x^2 + a^2) + \cdots + (b_{n-1}x + c_{n-1})(x^2 + a^2)^{n-1}$$

とできる。このとき

$$\frac{f_1(x)}{(x+a)^n} = \frac{a_0}{(x+a)^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x+a}$$
$$\frac{f_2(x)}{(x^2+a^2)^n} = \frac{b_0x + c_0}{(x^2+a^2)^n} + \cdots + \frac{b_{n-1}x + c_{n-1}}{x^2+a^2}$$

とできる。以上により次の 3 つの積分ができればよい事が分かる。

$$\int \frac{1}{(x+a)^n}dx, \quad \int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}dx, \quad \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$$

1 番目は $u = x + a$, 2 番目は $u = x^2 + a^2$ と置けば容易に積分できる。3 番目の積分は $n = 1$ のときは $x = at$ とおくと

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$$

に帰着できる。$n \geqq 2$ のときは次の漸化式により計算することができる。

$J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$ とおくと，漸化式

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left\{\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right\}$$

が成立するので (→ 演習問題 3.1)，この式により順次計算する事ができる。

演習問題 3.1 下記のヒントを参考にして上の漸化式を証明せよ。

ヒント: $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n} = \dfrac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ を積分すると $J_n = \displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx + a^2J_{n+1}$ が得られるので，部分積分すると…。

演習問題 3.2 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{x(x-1)}$ (2) $\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}$ (3) $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$

(4) $\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ (5) $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$ (6) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

(7) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+2}$ (8) $\dfrac{1}{x^3+1}$ (9) $\dfrac{1}{x^4+1}$

(10) $\dfrac{3x^3+x^2+3}{(x-1)^2(x^2+2x+4)}$

(11) $\dfrac{2(x^3+4x^2+7x+6)}{(x+1)^2(x^2+2x+5)}$

3.3　諸計算 II(置換積分)

この節では更に進んだ置換積分を扱う。今まで出てきた置換積分は被積分関数を見るとある程度変数の置き方が想定できた。ここで扱う置換積分は予め学んでいなければ分からないような置換積分である。

$\boxed{1}$ 3 **角関数の有理関数**

$\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ の形の積分，ただしここで $R(s,t)$ は s と t の有理関数である。$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{2}\frac{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1+t^2}{2}$$

$$\sin x=\sin 2\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{1}=\frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

$$=\frac{\left(2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\right)\times\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\left(\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\times\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}=\frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{1}=\frac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

$$=\frac{\left(\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\times\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\left(\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\times\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}=\frac{1-\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

なので,

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

となり有理関数の積分に帰着できる。

$I=\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}\,dx$ は $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ と置くと，

$$I=\int\frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{t}\,dt=\log|t|=\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

となる。

これは**万能であるが最善の方法とは限らない**。例えば，$\tan x$ で表される時は $t=\tan x$ と置く方が一般に簡単になる。

$I=\displaystyle\int(\tan x)^2\,dx$ の場合 $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ と置いても出来るが，計算は少し面倒である。このとき $t=\tan x$ と置くと，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{(\cos x)^2}=1+(\tan x)^2=1+t^2$ なので

$$\begin{aligned}I&=\int t^2\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt=\int dt-\int\frac{1}{1+t^2}\,dt\\&=t-\arctan t=\tan x-x\end{aligned}$$

となる。

一方 $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}I&=\int\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{8t^2}{(1-t)^2(1+t)^2(1+t^2)}\,dt\\&=\int\left\{\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{2}{1+t^2}\right\}dt\\&=-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}-2\arctan t\\&=-\frac{1}{\tan\dfrac{x}{2}+1}-\frac{1}{\tan\dfrac{x}{2}-1}-2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

となる。前者の方が計算は簡単であろう。

このように三角関数の積分の場合，ここで紹介した方法は最後の手段と考え，他の方法で試みてできないときに適用すると考えた方がよいであろう。例えば被積分関数が三角関数の積の形とき「積を和に直す公式」が使える。

演習問題 3.3　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\sin x\cos x$　(2) $\sin^3 x$　(3) $\dfrac{1}{\cos x}$

(4) $\dfrac{1}{\tan x}$　(5) $\dfrac{1}{1+\sin x}$　(6) $\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$

$\boxed{2}$ **ルートの中の** 2 **次式** (1)—3 **角関数**

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx$ の形の積分，ただし，ここで $R(s,t)$ は s と t の有理関数。2 通りの方法で計算をする。最初は 3 角関数を用いて変換するものを紹介し，次に無理式を用いるものを紹介する。3 角関数を用いる変換の場合 2 次式はあらかじめ $a^2-x^2, x^2+a^2, x^2-a^2$ のいずれかの形に変形されているものとする。

(1) $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx$

$x = a\sin t$ と置くと，

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx = \int R\left(a\sin t, a\cos t\right) a\cos t dt$$

(2) $\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx$

$x = a\tan t$ と置くと，

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx = \int R\left(a\tan t, \frac{a}{\cos t}\right) \frac{a}{\cos^2 t} dt$$

(3) $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$

$x = \dfrac{a}{\sin t}$ と置くと，

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx = -\int R\left(\frac{a}{\sin t}, \frac{a\cos t}{\sin t}\right) \frac{a\cos t}{\sin^2 t}\, dt$$

いずれの場合も 3 角関数の有理関数に帰着できる。

演習問題 3.4　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$　　(3) $\dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}$

(4) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$　　(5) $\sqrt{1-x^2}$

$\boxed{3}$ **ルートの中の** 2 **次式** (2)—**無理関数**

無理式を用いてルートの中に 2 次式がある場合の積分 $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ を求める。

(1) $a > 0$ の場合

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ と置くと，$x = \dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$，$dx =$

$\dfrac{2\sqrt{a}t^2+2bt+2\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$, $t-\sqrt{a}x = \dfrac{\sqrt{a}t^2+bt+c}{2\sqrt{a}t+b}$ となるので

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c}{2\sqrt{a}t+b}\right)\frac{2\sqrt{a}t^2+2bt+2\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$$

(2) $ax^2+bx+c=0$ が 2 解 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$ を持つ時。$a>0$ の場合もできるがここでは $a<0$ とする。$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ となる。$t=\sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$ または同じことだが $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$ と置くと，$x = \dfrac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2-a}$, $x-\alpha = \dfrac{a(\alpha-\beta)}{t^2-a}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2}$ より，

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \int R\left(\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}, \frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}\right)\frac{2a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2}dt$$

を得る。

演習問題 3.5　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　(3) $\sqrt{x^2+2}$
(4) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

方法の違いで結果が一見違うように見える時もある。例えば，$I = \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ を考える。3 角関数で置換すると，

$$I = I_1 = -\arcsin\frac{1}{x}$$

となるが，無理式を用いると，

$$I = I_2 = 2\arctan(x+\sqrt{x^2-1})$$

となる。見かけは違うが，実は $I_2 = \pi + I_1$ となっている。

演習問題 3.6　今までは学んだ事に対応する演習問題で，演習問題の場所によってどの方法を使うかというのは明らかであった。最後

に色々なタイプを混ぜて演習問題とする。積分計算の手法を身につけるのが目的なのですべてを解く必要はない。また中には難問もある。嗅覚 (?) を働かせてそれを避ける練習にもなるかもしれない。
　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$
(2) $\cos^2 x - \sin^2 x$
(3) $\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$
(4) $x \arcsin x$
(5) $\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$
(6) xe^{-x}
(7) $x \cos x$
(8) $x^2 \sin x$
(9) e^{3x+1}
(10) $2x \arctan x$
(11) $\log(2x+1)$
(12) $\dfrac{1}{x(\log x)^n}$
(13) $x^2 \log x$
(14) xe^{2x^2+3}
(15) $\dfrac{e^x}{x} + e^x \log x$
(16) $\arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$
(17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$
(18) $\cos^n x \sin x$
(19) $(ax^2+bx+c)e^x$
(20) $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$
(21) $\sin(\log x)$
(22) $x^3 e^x$
(23) $x^4 e^x$
(24) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$
(25) $\dfrac{1}{1+x^2}$
(26) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$
(27) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
(28) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$
(29) $\dfrac{1}{\sin x \cos^5 x}$
(30) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$
(31) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$
(32) $\dfrac{1}{3+\cos x}$
(33) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$
(34) $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$
(35) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(36) $\sqrt{x^2-1}$
(37) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$
(38) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$
(39) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$
(40) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$
(41) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$
(42) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$

(43) $\dfrac{1}{4+x^2}$

(44) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

(45) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

(46) $3x^2e^{x^3+1}$

(47) $\dfrac{1}{x^3(x+1)}$

(48) $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$

(49) $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$

(50) $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$

(51) $\dfrac{3}{x^3-1}$

(52) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$

(53) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$

(54) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$

(55) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

(56) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

(57) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

(58) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$

(59) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

(60) $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$

(61) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$

(62) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(63) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$

(64) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$

(65) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$

(66) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$

(67) $\dfrac{12}{x^3-8}$

(68) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

(69) $\sin 4x$

(70) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$

(71) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$

(72) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$

(73) $\log(1+\sqrt{x})$

(74) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$

(75) $3x^2(x^3+5)^6$

(76) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$

(77) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(78) $e^{ax}\cos bx$

(79) $e^{ax}\sin bx$

解析学 I 要綱 #11

3.4 微分方程式とは

現象 ⟶ モデル化 ⟶ 微分方程式を立てる
⟶ 微分方程式を解く ⟶ 現象を理解する

上は微分方程式を用いた現象の解析を図式にしたものである。この方法は発見以来 350 年ほどたつが，その威力は依然として大きい。ある意味で最も強力な解析手段と言える。図式では「解く」と書いてあるが「解けない」場合は数値計算等を行うことも含めて考えている。

物理学等ですでに扱っているとは思うが,「微分方程式はどんなものか」という説明から始める。最初は例から。

バネによる運動の分析を考える。バネに働く力を分析したところ，バネを伸ばしたり縮めたりしたとき働く力はバネの自然な長さからのずれの長さに比例することが分かったとする。

質量 m の物体 (質点と考える) が x 軸上を運動している。時刻 t における質点の x 座標を $x = x(t)$ とする。物体には原点からの距離に比例する原点向きの力 $F = -kx$ が働いている。ニュートンの運動方程式 $F = m\alpha$ (α は加速度) より x は

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

を満たす。この様にある関数とその導関数及び高次導関数の間に成立する式を**微分方程式**という。

この微分方程式を満たす関数 (微分方程式の解と呼ばれる) は，すべて $x = C_1 \sin(\omega t + C_2)$ (ただし $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とする) という形をしている事が分かる (この事は後で導く)。即ち単振動をすることが分かる。このような解は**一般解**と呼ばれる。「微分方程式を解く」とは微分方程式の一般解を求めることである。$t = 0$ のとき原点にあり，そのときの速度が v_0 である様な解を考える。その解は $x(0) = 0, \dfrac{dx}{dt}(0) = v_0$ を満たすので，$x = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t$ である事が分かる。この様に (**初期条件**と呼ばれる) 或る種の条件を付加する事により得られる解を**特殊解**と呼ぶ。

微分方程式を定義しておこう。前の例は独立変数が t, 従属変数が x であったが，ここでは独立変数 x, 従属変数 y としよう[1]。n を自然数とする。$n+2$ 変数関数 $F(x, Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$[2]が与えられているとする。このとき

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (*)$$

を n 階の**微分方程式** (*differential equation*) と呼び，関数 y で $(*)$ を満たすものを微分方程式の**解** (*solution*) という。すべての解を含む (一般に任意定数を n 個含む解) を**一般解** (*general solution*) といい，ある初期条件 (と呼ばれるある条件) を満たす解を**特殊解** (*particular solution*) という。「微分方程式を解く」とは，与えられた微分方程式の一般解を求める事，または初期条件が与えられているときは特殊解を求める事をいう。

最初の例は (独立変数を t とする)，$F(t, X_0, X_1, X_2) = mX_2 + kX_0$ とおけばよい。

与えられた条件から微分方程式を導出することを考えよう。このことを「微分方程式を立てる」という。実際の研究においては微分方程式を解く事よりも，微分方程式を立てる事の方が大事な場合が多い。

例を考える。平面内に曲線 $y = f(x)$ がある。この曲線は曲線上の任意の点における法線 (接線と直交する曲線) が原点を通るとする。このとき曲線が満たすべき微分方程式を立てよう。曲線上の点の座標をを (x, y) とする。この点における接線の傾きは $y' = \dfrac{dy}{dx}$ である。法線は接線と直交するので傾きは $-\dfrac{1}{y'}$ である。法線上の点の座標を (X, Y) とすると法線の方程式は

$$Y = -\frac{1}{y'}(X - x) + y$$

となる。この直線は原点 $(0, 0)$ を通るので $0 = -\dfrac{1}{y'}(0-x)+y$, 即ち

$$yy' + x = 0$$

を得る。次節で後でこの微分方程式を解く。

演習問題 3.7　次の条件の下で微分方程式を立てよ。

[1] 独立変数が 2 つ以上ある多変数関数に関する微分方程式 (**偏微分方程式**と呼ばれる) もあるが，ここでは扱わない。偏微分方程式も扱う立場では，我々が微分方程式と呼んでいるものを**常微分方程式**と呼ぶ。

[2] F が Y_n に依存しないとき，即ち Y_n が変化しても F が変化しない場合を除く。

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点を P とする。P における法線が x 軸と交わる点を N，P から x 軸へ下ろした垂線の足を Q とすると線分 QN の長さが常に一定である。
(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点を P とする。P における接線が x 軸と交わる点を S，y 軸と交わる点を T とすると点 P は線分 ST の中点である。
(3) 空気中を落下する物体に働く空気の抵抗は速度の 2 乗に比例する。比例定数を k，重力定数を g とする。速度を v とするとき v が満たすべき微分方程式を求めよ。

3.5 変数分離型

最も簡単な微分方程式は $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ であろう。これは $f(x)$ の不定積分が求まれば，$y = \displaystyle\int f(x)dx$ と求まる。

次に簡単なタイプが $\dfrac{dy}{dx} = \lambda y$ (λ は定数) であろう。これに関しては次が成立する。

命題 3.5 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \lambda y$ の一般解は $y = Ce^{\lambda x}$ である。

証明 恒等的に 0 となる写像 $y \equiv 0$ は解になっている。よって $y \not\equiv 0$ とする。ある点 x で 0 ではないの y で両辺を割ると $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \lambda$ が得られる。両辺を x で積分すると

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int \lambda dx$$

となる。$\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = \log|y|$, $\displaystyle\int \lambda dx = \lambda x + C_1$ なので，$|y| = e^{\lambda x + C_1} = e^{C_1}e^{\lambda x}$ を得る。よって $C = \pm e^{C_1}$ とおくと，$y = Ce^{\lambda x}$ となる。この式は最初の $y \equiv 0$ の場合も含んでいるので，一般解が得られた。∎

命題 3.5 の証明方法を一般化すると，微分方程式の解を求める方法として**変数分離型**と呼ばれるものが得られる。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

の形の微分方程式を変数分離型の微分方程式と呼ぶ。

$\dfrac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$ と変形すると[1],

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

が得られる。この積分が計算できれば y を含む式が得られ，y について解ければ解が得られる。

例えば $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ を考える。$\dfrac{1}{y}dy = 2xdx$ より $\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = \int 2xdx$, $\log|y| = x^2 + C_1$ となり，$y = Ce^{x^2} = C\exp(x^2)$ を得る。

演習問題 3.8　次の微分方程式を解け。

(1) $yy' + x = 0$
(2) 演習問題 3.7 (1) で得られた微分方程式
(3) 演習問題 3.7 (2) で得られた微分方程式
(4) 演習問題 3.7 (3) で得られた微分方程式

今まで微分方程式に対して解は存在する事を前提にした議論をしてきた。しかし，微分方程式が与えられた時，その解はいつでも存在するのだろうか。偏微分方程式も含めるとそれは正しくない事が知られている。次の定理は (常) 微分方程式の解の存在と一意性を保証するものである。証明抜きで紹介しておく。微分方程式が $\dfrac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y' \ldots, y^{(n-1)})$ の形をしているとき**正規型**という。

定理 3.6 [**微分方程式の解の存在と一意性**] $f(x, Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})$ はある領域 R で C^1 級 (導関数が連続) とする。R 内の点 $(a_0, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ を 1 つ指定する。このとき微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

の解で $y(a_0) = b_0, y'(a_0) = b_1, \ldots, y^{(n-1)}(a_0) = b_{n-1}$ を満たすものが唯 1 つ存在する。

---

[1]「$\dfrac{dy}{dx}$ は分数ではない」という立場からすると，この方法は正しくないないように見えるが，これをきちんとした数学的枠組みで議論する方法も知られているし，微分方程式を解くときによく用いられるので紹介しておく。

解析学 I 要綱 #12

3.6 演算子法

微分するという操作を演算子と考え微分方程式を解く方法を紹介しよう。この節では特に断らなければ独立変数は x とする。

関数 y に対しその導関数 y' を対応させる写像を D と書く。独立変数を明示的に表したいときは D_x と書く。$D(y) = y'$ だから例えば命題 3.5 の微分方程式は $D(y) = ky$ と書ける。

定数 λ を定数倍するという演算子と見る。即ち λ を，y に対し λy を対応させる (関数を λ 倍するという) 演算子と考える。同様に関数 $p(x)$ を関数倍する (y に対し $p(x)y$ を対応させる) 演算子と見る事ができる。

演算子 E, F に対し演算子としての和 $E+F$ を

$$(E+F)(y) = E(y) + F(y)$$

で定義する。積 FE を

$$(FE)(y) = F(E(y))$$

で定義する。一般には $FE \neq EF$ である。例えば $E = D$,$F = p(x)$(関数倍) とすると $FE(y) = p(x)y'$ だが，$EF(y) = E(p(x)y) = p'(x)y + p(x)y'$，即ち $EF - FE = p'(x)$ となり，$p'(x) \neq 0$ のときは $EF \neq FE$ である。$EF \neq FE$ 除くと加法の交換法則，分配法則等は実数の和・積と同じ様に計算できる。

命題 3.5 の微分方程式は $D(y) = \lambda y$ であったが，$D(y) - \lambda y = 0$ と変形し，$D - \lambda$ を演算子と考えると $(D-\lambda)y = 0$ という式が得られる。

命題 3.7 $D - \lambda = e^{\lambda x} D e^{-\lambda x}$ が成立する。一般的に $P(x) = \displaystyle\int p(x)dx$ とすると $D - p(x) = e^{P(x)} D e^{-P(x)}$ が成立する。

証明 式が意味している事は任意の[1]関数 y に対し $(D-\lambda)y = (e^{\lambda x} D e^{-\lambda x})y$ が成立する事である。

$(De^{-\lambda x})y = D(e^{-\lambda x}y)$ であり，積の微分法より

$$D(e^{-\lambda x}y) = D(e^{-\lambda x})y + e^{-\lambda x}D(y) = -\lambda e^{-\lambda x}y + e^{-\lambda x}D(y)$$

[1] 勿論微分可能な関数でなければ，D は作用できない。厳密には考えている範囲をきちんと定義する必要があるがここではきちんとさせないでおく。それがいやな人は，さしあたり C^∞ 関数全体を考えておけばよいだろう。

$$= e^{-\lambda x}\left\{D(y) - \lambda y\right\} = e^{-\lambda x}(D-\lambda)y$$

となる。両辺に $e^{\lambda x}$ を掛けると

$$(D-\lambda)y = e^{\lambda x}\left\{D(e^{-\lambda x}y)\right\} = e^{\lambda x}\left\{(De^{-\lambda x})y\right\} = \left(e^{\lambda x}De^{-\lambda x}\right)y$$

となり証明が終わる。後半の証明は $D(e^{-P(x)}) = -p(x)e^{P(x)}$ である事に注意すれば

$$\begin{aligned} D(e^{-P(x)}y) &= D(e^{-P(x)})y + e^{-P(x)}D(y) = -p(x)e^{-P(x)}y + e^{-P(x)}D(y) \\ &= e^{-P(x)}\left\{D(y) - p(x)y\right\} = e^{-P(x)}\left(D - p(x)\right)y \end{aligned}$$

となるので,

$$\left(e^{P(x)}De^{-P(x)}\right)y = \left(D - p(x)\right)y$$

を得る。よって $\left(e^{P(x)}De^{-P(x)}\right) = (D - p(x))$ となる。∎

演算子法を用いて命題 3.5 の別証明を与えよう。$Du = 0$ なら $u = C$(定数) である事を注意しておく。(一般に $Du = f(x)$ なら積分する事により $u = \displaystyle\int f(x)dx$ が得られる。) 与えられた微分方程式は演算子を用いて $(D-\lambda)y = 0$ と書ける。命題 3.7 より $e^{\lambda x}De^{-\lambda x}y = 0$ となる。$u = e^{-\lambda x}y$ とおくと $e^{\lambda x}Du = 0$ となり, 両辺に $e^{-\lambda x}$ を掛けると $Du = 0$ を得る。よって $u = C$ となる。$C = u = e^{-\lambda x}y$ より $y = Ce^{\lambda x}$ を得る。

λ が定数でない場合でも演算子法を用いることにより次が得られる。

命題 3.8 微分方程式 $(D - p(x))\,y = 0$ の一般解は $P(x) = \displaystyle\int p(x)dx$ とするとき

$$y = Ce^{P(x)} = C\exp\left(P(x)\right) = C\exp\left(\int p(x)dx\right)$$

である。

証明 命題 3.7 より $D - p(x) = e^{P(x)}De^{-P(x)}$ なので微分方程式は $\left(e^{P(x)}De^{-P(x)}\right)y = 0$ と変形できる。$u = e^{-P(x)}y$ とおくと, $e^{P(x)}Du = 0$ より $Du = 0$ を得る。よって $u = C$(定数) とできるので, $y = ue^{P(x)} = Ce^{P(x)}$ が分かる。∎

一般に演算子 L を

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

とするとき (ただし $a_n(x) \not\equiv 0$ とする),

$$Ly = f(x)$$

の形をしている微分方程式を n 階の**線型微分方程式** (*linear differential equation*) と呼ぶ。特に係数である $a_n(x)$ がすべて定数であるとき，定数係数の線型微分方程式という。定数係数の線型微分方程式は重要なタイプの微分方程式であり，しかも他のタイプに比べ解くのが容易である。この章では線型の微分方程式について議論する。また $f(x)=0$ のとき，この微分方程式を**同次型**といい，$f(x)\neq 0$ のとき**非同次型**という。

同次型の線型微分方程式の性質として重要なものに次がある。

命題 3.9 y が同次型の線型微分方程式の解のとき a を定数とすると ay も微分方程式の解である。また y_1, y_2 が同次型の線型微分方程式の解のとき y_1+y_2 も微分方程式の解である。

演習問題 3.9 命題 3.9 を証明せよ。

2 階の定数係数線型微分方程式を考える。最初に同次型を考える。例として $L = D^2-\lambda^2$ (ただし $\lambda\neq 0$ とする) とするとき $L(y)=0$ すなわち

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 y$$

を解いてみよう。

定数倍という演算子は D と交換可能，即ち $D\lambda = \lambda D$ が成立する事を注意しておこう。

$$D^2-\lambda^2 = (D-\lambda)(D+\lambda)$$

が成立するので

$$L(y) = (D^2-\lambda^2)y = (D-\lambda)(D+\lambda)y = 0$$

となる。$u=(D+\lambda)y$ とおくと，$(D-\lambda)u=0$ である。命題 3.7 より $D-\lambda = e^{\lambda x}De^{-\lambda x}$ なので $e^{\lambda x}De^{-\lambda x}u=0$ が成立している。$v=e^{-\lambda x}u$ とおくと，$e^{\lambda x}Dv=0$ より，両辺に $e^{-\lambda x}$ をかけると $Dv=0$ となる。よって積分すると $v=C_1$ となる (C_1 は積分定数)。このとき $u=e^{\lambda x}v=C_1e^{\lambda x}$ となる。よって微分方程式は

$$(D+\lambda)y = C_1e^{\lambda x}$$

となる。命題 3.7 より $(D+\lambda) = e^{-\lambda x}De^{\lambda x}$ となるので

$$e^{-\lambda x}De^{\lambda x}y = C_1e^{\lambda x}$$

を得る。$z = e^{\lambda x}y$ とおくき，両辺に $e^{\lambda x}$ をかけると $Dz = C_1 e^{2\lambda x}$ となる。両辺を積分する事により $z = \dfrac{C_1}{2\lambda}e^{2\lambda x} + C_2$ となる。$\dfrac{C_1}{2\lambda}$ をあらためて C_1 とおくと $z = C_1 e^{2\lambda x} + C_2$，よって一般解 $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$ を得る。

この例は一般化できる。演算子 $L = D^2 + aD + b$ に対し，微分方程式

$$Ly = 0$$

を考える。2 次方程式 $t^2 + at + b = 0$ が異なる 2 つの解をもつとする。この例と同じ方法で一般解を求めることができる (演習問題 3.12)。

次の例として $L = D^2 - 2D + 1$ とするとき

$$Ly = 0$$

を考える。前の例と同じように計算すれば解が得られるが，結果の形は異なる。$L = (D-1)^2$ と書けるので，$u = (D-1)y$ とおくと，微分方程式は $(D-1)u = 0$ となる。$D - 1 = e^x De^{-x}$ なので

$$e^x De^{-x}u = 0$$

が成立している。$v = e^{-x}u$ とおくと $e^x Dv = 0$ となり，$Dv = 0$ を得る。よって $v = C_1$ としてよい。このとき $u = C_1 e^x$ となる。$u = (D-1)y$ なので，$(D-1)y = C_1 e^x$ となるが命題 3.7 を用いると

$$e^x De^{-x}y = C_1 e^x$$

となり，両辺に e^{-x} をかけて

$$D(e^{-x}y) = C_1$$

となる。両辺を積分すると

$$e^{-x}y = C_1 x + C_2$$

となるので (C_2 は積分定数) 一般解

$$y = C_1 x e^x + C_2 e^x$$

を得る。この例と同じ方法で一般解を求めることができる (演習問題 3.12)。

同次型の最後の例として微分方程式

$$\left(D^2+D+1\right)y=0$$

を考える。$\lambda_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$，$\lambda_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ とおくと $D^2+D+1=(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)$ と因数分解できるので，最初の例と同様に計算すれば，一般解は

$$y=C_1\exp\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)+C_2\exp\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)$$

となる。$\exp\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)$ は複素数値関数なので，解関数 y も複素数値関数である。複素数値関数の範囲で解関数を調べている場合はこれで十分である。しかし実数値関数の解関数を必要とする場合は，オイラーの公式を用いて少し変形する必要がある。

オイラーの公式は

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

であった。これを用いると

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\exp\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left\{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}\end{aligned}$$

と変形できる。同様に

$$\exp\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left\{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$$

となる。

$$\begin{aligned}y&=C_1\exp\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)+C_2\exp\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)\\ &=C_1\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left\{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}+C_2\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left\{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}\\ &=\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left((C_1+C_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+(iC_1+iC_2)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\end{aligned}$$

$B_1 = C_1 + C_2, B_2 = iC_1 + iC_2$ とおくと

$$y = B_1 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B_2 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

となる。

前記のことは一般化することができる。(演習問題 3.13)。

演習問題 3.10　次の微分方程式を演算子法を用いて解け。ただし解関数は複素数値関数でもよいとする。

(1) $y' + y\sin x = 0$
(2) $y' + (x+1)y = 0$
(3) $y' + e^{2x}y = 0$
(4) $y'' - 5y' + 6y = 0$
(5) $y'' - y' - 6y = 0$
(6) $y'' + y = 0$
(7) $y'' + 4y = 0$
(8) $y'' - 2y' + y = 0$
(9) $y'' + 4y' + 4y = 0$

演習問題 3.11　次の微分方程式を実数値関数の範囲で解け。

(1) $y'' + y = 0$
(2) $y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (0 \neq \omega \in \mathbb{R})$
(3) $y'' - y' + y = 0$
(4) $y'' - 2y' + 2y = 0$

演習問題 3.12　次が成立することを示せ。

2 次式 $\varphi(t) = t^2 + at + b$ に対し方程式 $\varphi(t) = 0$ は解 α, β を持つとする。微分方程式

$$\left(D^2 + aD + b\right) y = 0$$

を考える。この微分方程式の一般解は $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

であり，$\alpha = \beta$ のとき

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

演習問題 3.13　次が成立することを示せ。

$\varphi(t) = t^2 + at + b = 0$ は実数解を持たないとする。$\varphi(t) = 0$ の複素解を $\lambda_1 \pm i\lambda_2$ とする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

の実数値関数としての一般解は

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x}\cos\lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x}\sin\lambda_2 x$$

である。ここで C_1, C_2 は実数である任意定数。

3.7　非同次型線型微分方程式

次に非同次型を扱おう。演算子法だと同次型の場合と同様に計算を実行すれば非同次型の場合も解を求めることができる。ただし，積分の計算は同次型に比べ一般には複雑になる。

微分方程式

$$(D^2-4)y = \sin 2x$$

の解を求めよう。$D^2-4=(D-2)(D+2)$ なので，$(D-2)(D+2)y = \sin 2x$ である。$u=(D+2)y$ とおくと，u に関する微分方程式は $(D-2)u=\sin 2x$ となる。$D-2=e^{2x}De^{-2x}$ なので

$$e^{2x}De^{-2x}u = \sin 2x$$

となる。$v=e^{-2x}u$ とおくと，v に関する微分方程式は

$$Dv = e^{-2x}\sin 2x$$

となる。両辺を積分すると

$$v = \int e^{-2x}\sin 2x\,dx$$

を得る。$\int e^{ax}\sin bx\,dx$ の積分はすでにやっているが復習しておく。$I=\int e^{-2x}\sin 2x\,dx, J=\int e^{-2x}\cos 2x\,dx$ とおく。

$$\begin{aligned}
I =& \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'\sin 2x\,dx \\
=& -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin 2x - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(\sin 2x)'\,dx \\
=& -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin 2x - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(2\cos 2x)\,dx \\
=& -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin 2x + J \\
J =& \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'\cos 2x\,dx \\
=& -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x - I
\end{aligned}$$

2 式から J を消去すると

$$I = -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x - I$$

より

$$I = -\frac{1}{4}e^{-2x}\sin 2x - \frac{1}{4}e^{-2x}\cos 2x$$

となる。

$$v = -\frac{1}{4}e^{-2x}\sin 2x - \frac{1}{4}e^{-2x}\cos 2x + C_1$$

ここで積分定数 C_1 が付加されていることに注意。よって

$$u = e^{2x}v = -\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + C_1 e^{2x}$$

となる。y に関する微分方程式は $u = (D+2)y$ なので $D+2 = e^{-2x}De^{2x}$ を用いて

$$e^{-2x}De^{2x}y = -\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + C_1 e^{2x}$$

と書ける。$w = e^{2x}y$ とおくと，w に関する微分方程式は

$$Dw = -\frac{1}{4}e^{2x}\sin 2x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos 2x + C_1 e^{4x}$$

となる。両辺を積分して

$$w = -\frac{1}{8}e^{2x}\sin 2x + \frac{C_1}{4}e^{4x} + C_2$$

を得る。$\dfrac{C_1}{4}$ を C_1 におき直すと，

$$y = -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

を得る。

この様に，演算子法を用いると線型微分方程式が同次型であろうと，非同次型であろうと同じ様に解を求めることができる。しかし，実際の積分計算が複雑になる場合もあるので，次を紹介しておく。

演算子 L が線型のとき (a) 任意の関数 y_1, y_2 に対し $L(y_1+y_2) = L(y_1) + L(y_1)$ (b) 任意の定数 α と任意の関数 y に対し $L(\alpha y) = \alpha L(y)$ が成立した (命題 3.9)。

L を線型演算子とする。$f(x) \neq 0$ とするとき

$$L(y) = f(x)$$

は非同次型の線型微分方程式である。これに関して次が成立する。

命題 3.10 L を線型演算子とし，線型微分方程式

$$L(y) = f(x) \qquad (*)$$

を考える。このとき $(*)$ から得られる同次型の微分方程式を

$$L(y) = 0 \qquad (**)$$

とする。このとき

「$(*)$ の一般解」=「$(*)$ の特殊解」+「$(**)$ の一般解」

となっている。

証明 $(*)$ の特殊解 y_0 が 1 つ与えられているとき次の 2 つを示せばよい。
(1) $(*)$ の任意の解 y に対し $(**)$ の解 y_1 が存在して $y = y_0 + y_1$ となる。
(2) $(**)$ の任意の解 y_1 に対し $y = y_0 + y_1$ は $(*)$ の解である。
y を $(*)$ の任意の解とする。$y_1 = y - y_0$ とおくと，L は線型演算子なので $L(y_1) = L(y - y_0) = L(y) - L(y_0) = f(x) - f(x) = 0$ となる。よって y_1 は $(**)$ の解である。
$(**)$ の任意の解を y_1 とする。$y = y_0 + y_1$ とおくと，$L(y) = L(y_0 + y_1) = L(y_0) + L(y_1) = f(x) + 0 = f(x)$ となる。よって y は $(*)$ の解である。 ∎

この命題により非同次型の一般解を求めるためには非同次型の特殊解と同次型の一般解を求めればよい事が分かる。先ほどの問題を例に考えてみよう。

$$(D^2 - 4)y = e^x \qquad (*)$$

これを解くためには

$$(D^2 - 4)y = 0 \qquad (**)$$

とするとき $(**)$ の一般解と $(*)$ の特殊解を求めればよい。$(**)$ の一般解はすでに学んでいるように

$$y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

である。

$(*)$ の特殊解は 1 個求まればよいので，解の形を予想する。$f(x) = \sin 2x$ であり，$f(x)$ の導関数は $\cos 2x$(の定数倍) の形なので

$$y_1 = a \sin 2x + b \cos 2x$$

という形をしていると予想する。このとき

$$\begin{aligned}(D^2-4)y_1 &= D^2y_1 - 4y_1\\ &= -4a\sin 2x - 4b\cos 2x - 4a\sin 2x - 4b\cos 2x\\ &= -8a\sin 2xx - 8b\cos 2x = f(x)\end{aligned}$$

を満たせばよい。よって $a = -\dfrac{1}{8}, b = 0$ となり，$y_1 = -\dfrac{1}{8}\sin 2x$ を得る。よって $(*)$ の一般解は

$$y = y_1 + y_2 = -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$$

となる。

$f(x)$ が e^x のときは導関数は e^x なので，$y_1 = ae^x$ とおき，a を求めればよい。$f(x)$ が多項式のときは，例えば 2 次式のときは $y_1 = ax^2 + bx + c$ とおいて a, b, c を求めればよい。

演習問題 3.14　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^2 + x$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = x + 4$

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = \sin 2x$　　(6) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$