解析学 I 要綱 #3

1.3 連続関数

「関数 (函数)」という概念は微積分というドラマの主人公ともいえるものである。江戸時代日本に「和算」と呼ばれた「数学」があり微積分と似たような事をやっていた。しかしその後の発展には結びつかなかった。私見ではあるが，和算の 2 大弱点として「『生産』と結び付かない」所謂「芸事」であった事に加え，理論的には「『関数概念』がなかった」事が挙げられる。

「関数」は前期に学んだが，歴史的に変化 (発展) しており現代的定義と古典的取り扱いがあった。古典的な取り扱いとは「解析的な式で表されているものが関数である。」とするもので，現代的定義は「対応」ということを前面に出す。ここでは現代的定義をもう一度与えるが，実際の講義の中では古典的立場が所々で顔を出すかもしれない。

定義 1.6 2 つの数の集合 X，Y に対し X の各元 x に対し Y の元 y を対応させる規則 f が与えられている時 f を X から Y への関数といい，

$$f : X \longrightarrow Y$$

と書く。元 x に元 y が対応している時 $y = f(x)$ と表す。X を定義域 (始域)，Y を終域，$\{y \mid y = f(x), x \in X\}$ を値域という。

現代的定義では厳密には関数 f と元 x における関数の値 $f(x)$ は区別する。例えば 2 次関数を例にとる。古典的取り扱いでいうと，式 $y = f(x) = x^2$ が与えられたら関数が定まったと考える。しかし現代的には対応であるから定義域，終域を決めなくてはならない。例えば $X = \mathbb{R}$(定義域)，$Y = \mathbb{R}$(終域) とし，x に対し x^2 を対応させる規則を f とする。この立場では終域を $Y' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0\}$ としたものは前とは違う関数になる。混乱のおそれがない場合には，この取扱いはいかにも片苦しい。講義では現代的定義を採用するが，誤解の恐れのないときは古典的取り扱いもする。

定義 1.7 2 つの関数 $f : X \longrightarrow Y$ と $g : Y \longrightarrow Z$ に対し関数 $h : X \longrightarrow Z$ で $h(x) = g(f(x))$ となるものが存在する。この関数 h を f と g の合成関数といい $h = g \circ f$ と表す。

関数 $f : X \longrightarrow Y$ が全単射であるとする。$y = f(x)$ とするとき，y に対し x を対応させる写像が考えられる。これを f の逆関数といい f^{-1} で表す。

関数の中でも「連続関数」は解析学において重要である。直感的にはグラフがつながっているという感じだが，定義は極限に基づいてされるのでグラフが書けそうもないものもある。

定義 1.8 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ をある区間 I で定義された関数とする。

(1) $a \in I$ に対し $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$ が成立する時関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続という。ただし閉区間の右 (左) 端の点の極限は左 (右) 極限を意味するものとする。

(2) I の任意の点で連続の時 f は I で連続という。

定義の (1) は

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x)$$

と書き直すと，極限をとるという操作と関数で写すという操作の順序を入れ換える事ができることを意味する。このようなとき 2 つの操作は可換であるという。

連続関数の幾つかの性質を紹介する。これはそれぞれ大事な性質である。

定理 1.9 [**最大値の定理**] 閉区間で定義された連続関数は最大値をとる。

定理 1.10 [**中間値の定理**] 連続関数は中間値をとる。即ち，閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f が $f(a) < f(b)$ を満たしているとする。$f(a) < \alpha < f(b)$ となる任意の α に対しある c $(a < c < b)$ が存在して $f(c) = \alpha$ となる。

定理 1.11 [**逆関数の定理**] 単調で連続な関数に対して逆関数が存在して，その逆関数も連続関数になる。

最大値定理は「実数の連続性」から導かれる。そして最大値定理を用いて「微積分の基本定理」が証明される。上であげた定理はいずれもきちんと証明するためには，基礎理論からきちんと議論する必要がある。興味がある人のために星印付きの演習問題とする。

演習問題 ****1.7** 定理 1.9, 1.10, 1.11 を証明せよ。

1.4 導関数

関数 f の導関数 f' は (存在する場合) 次の式で定義されるものであった。

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

x においてこの極限が存在するとき，f は x で**微分可能** (*differentiable*) であるという。定義域の各点で微分可能であるとき，関数 f は**微分可能** (*differentiable*) であるという。ただし f の定義域が閉区間 I のとき区間の左端の点 a で微分可能とは次の右極限が存在する場合をいう事とする。

$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{h\to +0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

右端の点の場合は次の左極限の存在する場合をいう。

$$f'(a) = f'_-(a) = \lim_{h\to -0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

演習問題 1.8 微分可能な関数は連続であることを示せ。また連続であるが微分可能でない関数の例をあげよ。

前期すでに学んでいる部分もあるので，ここでは「微分 = 線型近似 (1 次近似)」見方に関してのみ説明しておく。f は微分可能とする。今 $x = a+h$ とし，a のまわりの関数の様子を考える。$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = \varepsilon$ とおくと $h\to 0$ のとき $\varepsilon \to 0$ となる。つまり

$$f(x) = f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon h$$

において h が非常に小さいとき，εh は (**非常に**)^2 小さいと考えられる。この項を無視した残りの項は h の 1 次式になるが，これが $f(x)$ を近似しているので，**線型近似**と呼ばれる。

逆に微分可能な関数 $f(x) = f(a+h)$ を h に関する 1 次式 $A+Bh$ で「近似」する事を考える。直線と関数の差を

$$d(h) = f(a+h) - (A+Bh)$$

とおく。「近似」と呼ぶには $d(0) = 0$ は必要であろう。このとき $d(0) = f(a) - A$ なので $A = f(a)$ となる。「近似がよい」ことを「$d(h)$ が小さいこと」と考える。$\varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h}$ とおくとき，$\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) =$

0 となるとき $d(h)$ は (**非常に**)^2 小さいと考えられるので，これを「近似がよい」ことの定義として採用する。このとき

$$\varepsilon(h) \quad = \quad \frac{f(a+h)-(f(a)+Bh)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - B$$

となるので $B = f'(a)$ のとき $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ となる。よって一番近似のよいのは $f(a)+f'(a)h$，即ち接線であることが分かる。

以上のことから「微分」,「線型近似」,「接線」は三位一体の関係にあると言える。このことを次の図で表しておこう。

$$\begin{tikzcd} \boxed{微分} \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & & \boxed{線型近似} \arrow[dl, Leftrightarrow] \\ & \boxed{接線} & \end{tikzcd}$$

次に $f(x) = f(a+h)$ を h に関する 2 次式 $A+Bh+Ch^2$ で近似することを考える。$d(h) = f(a+h)-(A+Bh+Ch^2)$ に対し $\varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h^2}$ とおく。$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ が成立するとき，この 2 次式を「近似が一番よい 2 次式」と定義する。このとき $d(h) = \varepsilon(h)h^2$ なので $d(0) = 0$ としてよい。よって $d(0) = f(a)-A = 0$ より $A = f(a)$ となる。$\lim_{h\to 0}\dfrac{d(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h = 0$ なので

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-(f(a)+Bh+Ch^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - B - Ch\right) \\
&= f'(a) - B
\end{aligned}$$

となるので $f'(a) = B$ が分かる。また

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-(f(a)+f'(a)h+Ch^2)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)-2Ch}{2h} \qquad \text{(ロピタルの定理を使用)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)-2C}{2}
\end{aligned}$$

となるので $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ より $C = \dfrac{f''(a)}{2}$ となる。よって近似の一番よい 2 次式は

$$f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2$$

となる。

この 1 次近似，2 次近似を多項式の場合を例に幾何学 (図形) 的に見てみよう。$y = f(x) = x^3 - x$ とする。これを $x = 1$ で近似することを考える。定義に基づいて導関数を求めて計算できるが，ここでは多項式という性質を用いて計算する。$x = 1$ で近似するので，$x = h + 1$ とする。$f(x)$ を h で表すと，

$$f(x) = (1+h)^3 - (1+h) = 2h + 3h^2 + h^3$$

となる。多項式の場合，h による展開で 2 次以上の項をカットして得られる 1 次式が近似のよい 1 次式になっている。また h による展開で 3 次以上の項をカットして得られる 2 次式が近似のよい 2 次式になっている。この場合それらは

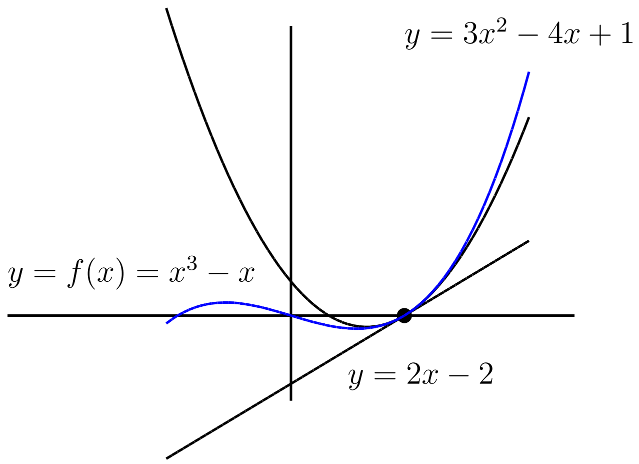
$$2h, \qquad 2h + 3h^2$$

になる。このままでもよいが，x に書き換えると

$$2h = 2(x-1) = 2x - 2$$

$$2h + 3h^2 = 2(x-1) + 3(x-1)^2 = 3x^2 - 4x + 1$$

である。$x = 1$ の近くでは直線も 2 次式も勿論よい近似を与えているが，2 次式は曲がりぐあいも含めてよく表現していることが分かる。



演習問題 1.9 近似の一番よい 3 次式を求めよ。ここで近似の一番よい 3 次式 $g(h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3$ とは $d(h) = f(a+h) - g(h)$ に対し $\varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h^3}$ とおくとき $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立するものをいう。関数は何回でも微分できることを仮定する。

演習問題 1.10　次の関数 $y = f(x)$ を $x = a$ で一番良く近似する 1 次式，2 次式，3 次式を求めよ。

(1) $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$　(a=0)　(2) $f(x) = e^x$　$(a = 1)$
(3) $f(x) = (x+1)^5$　$(a = 0)$

ここで前期に学んだ定理について結果のみ記しておく。理解があやふやな人は復習しておくこと。

定理 1.12 関数 f, g は微分可能とし，a は定数とする。
(1) $(f+g)' = f' + g'$
(2) $(af)' = af'$
(3) $(fg)' = f'g + fg'$　(**積の微分法**)

定理 1.13 [**合成関数の微分法**]　関数 $y = f(x)$ と $z = g(y)$ が共に微分可能で合成関数
$z = g \circ f(x) = g(f(x))$ が定義されるとき

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

が成立する。

定理 1.14 [**逆関数の微分法**]　関数 f が微分可能かつ単調であるとき，逆関数は微分可能で導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

定理 1.15

(1) $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$　(2) $\left(e^x\right)' = e^x$
(3) $\left(a^x\right)' = a^x \log a$　(4) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$
(5) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$　(6) $(\sin x)' = \cos x$
(7) $(\cos x)' = -\sin x$　(8) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
(9) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(10) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(11) $\left(\arctan x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

導関数の計算は数学序論ですでにやっているので，演習問題は用意しなかった。微分の計算がよくわからないという人は数学序論の導関数の計算部分の演習問題をもう一度やってみる事。

1.5　平均値の定理

この節で取り上げる平均値の定理は微積分学全体の中でもキーポイントとなる重要な定理である。「或る区間で $f'(x) > 0$ ならはそこで単調増加」という命題もこの定理から導かれる

定理 1.16 [**平均値の定理**]　関数 f は閉区間 $[\,a, b\,]$ で連続，開区間 $(\,a, b\,)$ で微分可能とする。このとき $a < c < b$ を満たす c が存在して

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成立する。

この定理を示すために次の定理を用いる。

定理 1.17 [**Rolle(ロル) の定理**]　関数 f は閉区間 $[\,a, b\,]$ で連続，開区間 $(\,a, b\,)$ で微分可能とする。$f(a) = f(b)$ ならば $a < c < b$ をみたす c が存在して $f'(c) = 0$ が成立する。

証明　最大値定理より最大値を与える c が存在する。今 $a < c < b$ を仮定する。c は最大値を与えるので任意の h に対し $c + h$ が区間 $[\,a, b\,]$ に入っていれば $f(c + h) \leqq f(c)$ が成立する。$h > 0$ のとき $\dfrac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqq 0$ なので

$$f'(c) = f'_+(c) = \lim_{h \to +0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqq 0$$

が成立する。また $h < 0$ のとき $\dfrac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqq 0$ なので

$$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{h \to -0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqq 0$$

が成立する。$0 \leqq f'(c) \leqq 0$ より $f'(c) = 0$ である。

途中 $a < c < b$ を仮定したが，これが成立しない場合 $f(a) = f(b)$ が最大値となっている。f が定数関数の場合は定理は成立しているので定数関数でないと仮定する。このときは前述の議論を最小値に関して行えばよい (演習問題 1.11 参照)。 ∎

演習問題 1.11　定理の証明の最後の部分 (最小値 c が $a < c < b$ に存在するとき $f'(c) = 0$ となる) を証明せよ。

この定理から平均値の定理が示されるが，ここでは平均値の定理を一般化した次の定理を示す。

定理 1.18 [コーシーの平均値定理] 関数 f, g は閉区間 $[\,a,\,b\,]$ で連続，開区間 $(\,a,\,b\,)$ で微分可能とする。$(\,a,\,b\,)$ で $g'(x) \neq 0$ ならば $a < c < b$ をみたす c が存在して

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

が成立する。

定理において $g(x) = x$ とおくと平均値の定理になる。

証明　天下りではあるが

$$F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

とおく。この関数 F は $[\,a,\,b\,]$ で連続，(a,b) で微分可能である。また $F(a) = 0, F(b) = 0$ が成立する。よって Rolle の定理より c $(a < c < b)$ が存在して $F'(c) = 0$ が成立する。

$$F'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$$

なので

$$0 = F'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$$

が成立する。$g(b) - g(a) = 0$ とすると，$g'(x) \neq 0$ より Rolle の定理に矛盾する。よって $g(b) - g(a) \neq 0$ となる。割り算を実行すれば定理が得られる。∎

ここで平均値の定理を少し拡張した形で書き直しておこう。$b = a + h$ とし，$\theta = \dfrac{c - a}{h}$ とおくと平均値の定理は

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h \quad (0 < \theta < 1)$$

となる θ が存在するという形になる。この形で考えると，h が負のときも定理は成立する。即ち次の形で述べる事ができる。

定理 1.19 関数 f は区間 I で微分可能とする。$a, a+h$ が区間 I に属しているとする。このときある θ $(0 < \theta < 1)$ が存在して

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h$$

となる。

平均値の定理から次の系が従う。

系 1.20 f, g は区間 I で微分可能とする。
(1) 区間 I において $f'(x) = 0$ ならば $f(x)$ は定数関数である。
(2) 区間 I において $f'(x) = g'(x)$ ならばある定数 C が存在して $f(x) = g(x) + C$ と書ける。

系 1.21 f は区間 I で微分可能とする。
(1) 区間 I において $f'(x) > 0$ ならば f は単調増加である。
(2) 区間 I において $f'(x) < 0$ ならば f は単調減少である。

系 1.22 f は区間 I で微分可能とする。
(1) 区間 I において $f'(x) \geqq 0$ ならば f は単調非減少である。
(2) 区間 I において $f'(x) \leqq 0$ ならば f は単調非増加である。

演習問題 1.12 平均値の定理から系 1.20, 1.21,1.22 を導け。

これらの定理・系についていくつか注意。解析学 II で「微積分の基本定理」と呼ばれる定理を証明するが，そのときキーになる命題が系 1.20 である。系 1.21，1.22 は数学序論においても学んだ増減表・グラフの概形を描くことの基礎にある命題である。また定理 1.18 は数学序論で不定形の極限を求めるとき有効だったロピタルの定理の基礎にある定理である。

通常の講義であれば次にロピタルの定理などの応用を扱うのだが，序論で扱っているので省略する。理解があやふやな人は序論の該当部分を復習しておくこと。

演習問題 *1.13 定理 1.18 を用いてロピタルの定理を証明せよ。ロピタルの定理とは以下の内容の定理である。

f, g は a の周りで微分可能とする。$\lim_{x\to a} f(x) = 0$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ あるいは，$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ となるとき，$\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して，両者の値は一致する。ここで a は $\pm\infty$ でもよい。