解析学 I 要綱 #10

3 1 変数関数の不定積分と微分方程式

ここでは微分方程式を解くために必要な 1 変数関数の不定積分についてのみ扱う。定積分は解析学 II で扱うが，定積分と不定積分の違いに関して一言だけふれておく。高校では不定積分 (原始関数) を用いて定積分が定義されていた。これは便法と考えるべきで，厳密には正しい定義とは言えない。

不定積分は微分の逆として定義されるものであるが，定積分は求積法と関係して定義されるものであり，直接には不定積分とは無関係である。定義としては無関係の両者の関係にニュートン・ライプニッツが独立に気づいたとき微積分学が成立したといえる。この事は解析学 II で定積分の定義のときにもう一度ふれるが，この事をきちんと理解する事が積分の理論的把握のキーポイントである。

3.1 不定積分の定義と諸性質

数学序論で積分の基本的部分は学んでいるので，ここでは簡単に復習した後，数学序論で述べなかった幾つかの計算法について学ぶ。

関数 $F(x)$ が微分可能で

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

となるとき，$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数** (*primitive function*) または**不定積分** (*indefinite integral*) といい，

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

と表す。$f(x)$ を**披積分関数**と呼ぶ。原始関数は $f(x)$ から一意的に決まるものではないが，定数分の差しかないので，

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

のように表す。この C を積分定数と呼ぶ。前期の数学序論では混乱する場合を除き通常省略したが，微分方程式を扱う場合は積分定数を書く必要がある。微分方程式に入ったら積分定数は書くことにする。またこの章の以下の部分で関数は積分可能であることを仮定し，そのことをいちいち断らないこととする。

次の諸命題に関しては前期で学んだ。

命題 3.1 [**積分の線型性**]

(1) $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

命題 3.2 [**いくつかの関数の不定積分**]

(1) $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}(a \neq -1)$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$

(3) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$ (4) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$

(5) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$ (6) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$

定理 3.3 [**置換積分法**] $x = \varphi(t)$ とすると,

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

置換積分は色々な場合に色々な形の変数変換が考案されている。詳しくは 3.3 節で扱う。

定理 3.4 [**部分積分法**]

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

3.2 諸計算 I (有理関数の不定積分)

有理関数は積分を我々の知っている関数 (初等関数) で書く事ができることが知られている。積分方法を一般的に述べるのではなく，具体例を取り上げて一般的な方法が分かる様に積分計算を実行する事にする。$I = \displaystyle\int \frac{x^4+x^3-x-4}{x^3-1}\,dx$ を例にとる。

(1) **仮分数を帯分数へ**

最初に分子の次数が分母の次数より大きければ帯分数の形にして分子の次数を小さくする。

$$x^4+x^3-x-4 = (x+1)(x^3-1)-3$$

より

$$\frac{x^4+x^3-x-4}{x^3-1} = x+1-\frac{3}{x^3-1}$$

となる。

$$\int \frac{x^4+x^3-x-4}{x^3-1}\,dx = \int (x+1)\ dx - \int \frac{3}{x^3-1}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + x - \int \frac{3}{x^3-1}\,dx$$

となるので $\dfrac{3}{x^3-1}$ の積分を求めればよい。

(2) **部分分数展開**

部分分数展開とは

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

のように分母が積の形になっている分数式を和の形に直すものである。分母が共通因子のない積に書けているときは必ず部分分数の形に直すことが可能であることが**知られている**。更に分子の次数が分母の次数より小さい場合は，部分分数の分子の次数も分母の次数より小さく選べることも知られている。

部分分数展開をするために分母を因数分解する。

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

上に述べたことから

$$\frac{3}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

を満たす定数 a,b,c が存在することが分かる。よってそのような a,b,c を見つけよう。分母を払うと

$$3 = a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1) \tag{1}$$

が恒等的に成立している。a,b,c を見つける方法としてここでは**係数比較法**と**代入法**を紹介する。

係数比較法は式を展開して降冪 (勿論昇冪でもよい) に整理し係数を比較する方法である。(1) 式を展開すると

$$3 = (a+b)x^2 + (a-b+c)x + a - c$$

となる。係数を比較すると 2 次の係数は 0，1 次の係数も 0，0 次の係数は 3 なので

$$a+b=0, \quad a-b+c=0, \quad a-c=3$$

である。これを解くと $a=1, b=-1, c=-2$ が得られる。

代入法は (1) の x に適当な値を代入する方法である。代入する値はなんでもよいが，計算しやすい値がよい。$x=1$ のとき第 2 項は 0 になるので計算が容易である。

$x=1$ を代入すると

$$3 = a(1^2+1+1)+(b1+c)(1-1)$$

となるので，$a=1$ が得られる。$a=1$ なので (1) 式は

$$3 = x^2+x+1+(bx+c)(x-1)$$

となるが移行して

$$x^2+x-2+(bx+c)(x-1) = (x-1)(x+2)+(bx+c)(x-1) = 0$$

となる。$x-1$ で両辺を割ると

$$x+2+(bx+c) = 0$$

が恒等的成立するので $b=-1, c=-2$ となる。

今の場合 $x=1$ しか代入しなかったが，必要に応じて 2 つ以上の値を代入する場合もあるし，2 乗がある場合は式を微分して代入する方法もある。

いずれの方法かにより

$$\int \frac{3}{x^3-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx$$

が得られる。

(3) **積分の実行**

$\displaystyle\int \frac{1}{1\text{ 次式}}\,dx$ の積分は容易である。よって $\displaystyle\int \frac{1\text{ 次式}}{2\text{ 次式}}\,dx$ の積分ができればよい。ただし [2 次式] は実数の範囲で因数分解できないことに注意すること。実数の範囲で因数分解できるものは更に部分分数展開可能である。

実数の範囲で因数分解できない 2 次式に対し，

$$x^2+x+1 \longrightarrow t^2+a$$

と 2 次式を 1 次の項がない形に変形する。$x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 +$

$\dfrac{3}{4}$ となるので $t = x + \dfrac{1}{2}$ と変数変換すると $\dfrac{dt}{dx} = 1$ なので

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)+2}{t^2+\frac{3}{4}}\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt + \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt$$

となる。前者は $u = t^2 + \dfrac{3}{4}$ とおくと $\dfrac{du}{dt} = 2t$ なので

$$\int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int \frac{t}{u}\frac{dt}{du}\,du = \int \frac{t}{u}\frac{1}{2t}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\log|u|$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(t^2+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\log(x^2+x+1)$$

後者は

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$$

に帰着させる。

$t^2 + \dfrac{3}{4} = t^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ なので $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}u$ とおくと $\dfrac{dt}{du} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので

$$\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int \frac{1}{\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}}\frac{dt}{du}\,du = \int \frac{1}{\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}\,du$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan u$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

以上を合わせると

$$I = \frac{x^2}{2} + x - \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

(4) 少し理論的に

任意の有理関数の不定積分が初等関数で表されるかどうかを考えてみる。

一般の有理関数を $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ とする。(1) の操作で分子の次数は分母の次数より小さいと仮定してよい。

次に部分分数展開をするため $g(x)$ の因数分解を実行する。アルゴリズムは存在しないが，実数の範囲で 1 次式または 2 次式に因数分解される事が知られている (代数学の基本定理)。$g(x) = g_1(x)g_2(x)$ と分解されて，$g_1(x)$ と $g_2(x)$ が共通因数を持たない場合

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

と部分分数展開できることが知られている。このときそれぞれの分子の次数はそれぞれの分母の次数より小さい。

同じ因数が 2 個以上存在する場合もあるので，部分分数展開を実行すると，次の形の関数の和になっている。

$$\frac{f_1(x)}{(x+a)^n}, \qquad \frac{f_2(x)}{(x^2+ax+b)^n}$$

分母が $(x^2+ax+b)^n$ の場合は変数変換することにより，$(x^2+a^2)^n$ と仮定してよい。分子を $(x+a)$ または (x^2+a^2) で展開することができる。即ち

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x+a)^k \\
&= a_0 + a_1(x+a) + \cdots + a_{n-1}(x+a)^{n-1} \\
f_2(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}(b_kx+c_k)(x^2+a^2)^k \\
&= (b_0x+c_0) + (b_1x+c_1)(x^2+a^2) + \cdots + (b_{n-1}x+c_{n-1})(x^2+a^2)^{n-1}
\end{aligned}$$

とできる。このとき

$$\begin{aligned}
\frac{f_1(x)}{(x+a)^n} &= \frac{a_0}{(x+a)^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x+a} \\
\frac{f_2(x)}{(x^2+a^2)^n} &= \frac{b_0x+c_0}{(x^2+a^2)^n} + \cdots + \frac{b_{n-1}x+c_{n-1}}{x^2+a^2}
\end{aligned}$$

とできる。以上により次の 3 つの積分ができればよい事が分かる。

$$\int \frac{1}{(x+a)^n} dx, \quad \int \frac{x}{(x^2+a^2)^n} dx, \quad \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$$

1 番目は $u = x + a$, 2 番目は $u = x^2 + a^2$ と置けば容易に積分できる。3 番目の積分は $n = 1$ のときは $x = at$ とおくと

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x$$

に帰着できる。$n \geqq 2$ のときは次の漸化式により計算することができる。

$J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$ とおくと，漸化式

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left\{ \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n \right\}$$

が成立するので ($\to$ 演習問題 3.1)，この式により順次計算する事ができる。

演習問題 3.1　下記のヒントを参考にして上の漸化式を証明せよ。
ヒント: $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n} = \dfrac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ を積分すると $J_n = \displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx +$ $a^2 J_{n+1}$ が得られるので，部分積分すると…。

演習問題 3.2　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{x(x-1)}$　　(2) $\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}$

(3) $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$　　(4) $\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

(5) $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$　　(6) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

(7) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+2}$　　(8) $\dfrac{1}{x^3+1}$

(9) $\dfrac{1}{x^4+1}$　　(10) $\dfrac{3x^3+x^2+3}{(x-1)^2(x^2+2x+4)}$

(11) $\dfrac{2(x^3+4x^2+7x+6)}{(x+1)^2(x^2+2x+5)}$　　(12) $\dfrac{x^3+4x^2+8x+16}{(x^2+4)(x+2)^2}$