解析学 I 要綱 #14

3.7 非同次型線型微分方程式

次に非同次型を扱おう。演算子法だと同次型の場合と同様に計算を実行すれば非同次型の場合も解を求めることができる。ただし積分は一般に複雑になる。

微分方程式

$$(D^2 - 4)y = \sin x$$

の解を求めよう。$D^2 - 4 = (D-2)(D+2)$ なので，$(D-2)(D+2)y = \sin x$ である。$u = (D+2)y$ とおくと，u に関する微分方程式は $(D-2)u = \sin x$ となる。$D - 2 = e^{2x} D e^{-2x}$ なので

$$e^{2x} D e^{-2x} u = \sin x$$

となる。$v = e^{-2x} u$ とおくと，v に関する微分方程式は

$$Dv = e^{-2x} \sin x$$

となる。両辺を積分すると (積分は既知とする)

$$v = -\frac{2}{5} e^{-2x} \sin x - \frac{1}{5} e^{-2x} \cos x + C_1$$

を得る。$e^{-2x} u = v = -\frac{2}{5} e^{-2x} \sin x - \frac{1}{5} e^{-2x} \cos x + C_1$ なので

$$u = -\frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + C_1 e^{2x}$$

となる。$u = (D+2)y$ なので y に関する微分方程式は $(D+2)y = -\frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + C_1 e^{2x}$ なので $D + 2 = e^{-2x} D e^{2x}$ を用いて

$$e^{-2x} D e^{2x} y = -\frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + C_1 e^{2x}$$

と書ける。$w = e^{2x} y$ とおくと，w に関する微分方程式は

$$Dw = -\frac{2}{5} e^{2x} \sin x - \frac{1}{5} e^{2x} \cos x + C_1 e^{4x}$$

となる。両辺を積分して (積分は既知とする)

$$w = -\frac{1}{5} e^{2x} \sin x + \frac{C_1}{4} e^{4x} + C_2$$

を得る。$\dfrac{C_1}{4}$ を C_1 におき直すと，

$$y = -\frac{1}{5}\sin x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

を得る。

この様に，演算子法を用いると線型微分方程式が同次型であろうと，非同次型であろうと同じ様に解を求めることができる。ただし「積分は既知とした」という部分の計算は複雑な場合もある。

ここでは複雑な積分計算を避けることができる次を紹介しておく。

演算子 L が線型のとき (a) 任意の関数 y_1, y_2 に対し $L(y_1+y_2) = L(y_1) + L(y_1)$ (b) 任意の定数 α と任意の関数 y に対し $L(\alpha y) = \alpha L(y)$ が成立した (命題 3.9)。

L を線型演算子とする。$f(x) \neq 0$ とするとき

$$L(y) = f(x)$$

は非同次型の線型微分方程式である。これに関して次が成立する。

命題 3.10 L を線型演算子とし，線型微分方程式

$$L(y) = f(x) \qquad (*)$$

を考える。このとき $(*)$ から得られる同次型の微分方程式を

$$L(y) = 0 \qquad (**)$$

とする。このとき

「$(*)$ の一般解」=「$(*)$ の特殊解」+「$(**)$ の一般解」

となっている。

証明 $(*)$ の特殊解 y_0 が 1 つ与えられているとき次の 2 つを示せばよい。

(1) $(*)$ の任意の解 y に対し $(**)$ の解 y_1 が存在して $y = y_0 + y_1$ となる。

(2) $(**)$ の任意の解 y_1 に対し $y = y_0 + y_1$ は $(*)$ の解である。

y を $(*)$ の任意の解とする。$y_1 = y - y_0$ とおくと，L は線型演算子なので $L(y_1) = L(y - y_0) = L(y) - L(y_0) = f(x) - f(x) = 0$ となる。よって y_1 は $(**)$ の解である。

$(**)$ の任意の解を y_1 とする。$y = y_0 + y_1$ とおくと，$L(y) = L(y_0 + y_1) = L(y_0) + L(y_1) = f(x) + 0 = f(x)$ となる。よって y は $(*)$ の解である。 ∎

この命題により非同次型の一般解を求めるためには非同次型の特殊解と同次型の一般解を求めればよい事が分かる。先ほどの問題を例に考えてみよう。

$$(D^2 - 4)y = \sin x \qquad (*)$$

これを解くためには

$$(D^2 - 4)y = 0 \qquad (**)$$

とするとき $(**)$ の一般解と $(*)$ の特殊解を求めればよい。$(**)$ の一般解はすでに学んでいるように

$$y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

である。

$(*)$ の特殊解は 1 個求まればよいので，解の形を予想する。$f(x) = \sin x$ なので，解は三角関数であることが予想される。よって $y_1 = a\sin x + b\cos x$ という形をしていると予想する。このとき

$$\begin{aligned}(D^2 - 4)y_1 &= D^2 y_1 - 4y_1\\ &= -a\sin x - b\cos x - 4a\sin x - 4b\cos x\\ &= -5a\sin x - 5b\cos x = f(x)\end{aligned}$$

を満たせばよい。よって $a = -\dfrac{1}{5}, b = 0$ となり，$y_1 = -\dfrac{1}{5}\sin x$ を得る。よって $(*)$ の一般解は

$$y = y_1 + y_2 = -\frac{1}{5}\sin x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

となる。

$f(x)$ が指数関数 e^{kx} のときは $y_1 = ae^{kx}$ とおき，a を求めればよい。$f(x)$ が多項式のときは，例えば 2 次式のときは $y_1 = ax^2+bx+c$ とおいて a, b, c を求めればよい。

演習問題 3.15　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^2 + x$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = x + 4$

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = \sin 2x$　　(6) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$