

演習問題 1.14 ライブニッツの定理を数学的帰納法で証明せよ。

2 項係数に関して

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{kn!}{k(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)(n-k)!} \\ &= \frac{kn!}{k!(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

が成立することを注意しておく。

$f(x), g(x)$ を f, g と書く。

$$(fg)' = f'g + fg' = \binom{1}{0}f'g + \binom{1}{1}fg'$$

より $n = 1$ のとき成立している。 n のとき成立を仮定する。即ち

$$\frac{d^n}{dx^n} (f \cdot g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

の成立を仮定する。この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (f \cdot g) &= \left(\frac{d^n}{dx^n} (f \cdot g) \right)' = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \right)' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f^{(n-k)} g^{(k)} \right)' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\left(f^{(n-k)} \right)' g^{(k)} + f^{(n-k)} \left(g^{(k)} \right)' \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n-k+1)} g^{(k)} \\ &= \binom{n}{0} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n+1)} \\ &= \binom{n+1}{0} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(0)} g^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} \end{aligned}$$

となり $n + 1$ のときも成立する。

演習問題 1.15 次の関数の n 次導関数を求めよ。(問題では「数学的帰納法で示す」ことを要求されていないので、数学的帰納法で証明しなくてもよいが、それを要求されたときはできるようにしておくこと。)

$$(1) f(x) = x^4$$

$$(3) f(x) = x^3 \log x$$

$$(5) f(x) = \log(x+1)$$

$$(7) f(x) = \sin x$$

$$(2) f(x) = x^3 e^x$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$(6) f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

$$(8) f(x) = \sin x \cos x$$

問題では帰納法で証明することは要求されていないが、解説しておく。

(1) $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f^{(3)}(x) = 24x$, $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(5)}(x) = 0$, $f^{(n)}(x) = 0$ ($n \geq 6$) となる。この書き方でもよいが、少し「格好つける」なら順列の記号 ${}_n P_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$ を用いて

$$f^{(n)}(x) = {}_4 P_n x^{4-n}$$

としてもよい。

(2) ライブニッツの定理

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(x) \cdot g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

を用いる。 $f(x)$ は関数に用いられているので、定理の $f(x)$ を $g(x)$ に $g(x)$ を $h(x)$ に変更して、 $g(x) = e^x$, $h(x) = x^3$ とすると、 $h'(x) = 3x^2$, $h''(x) = 6x$, $h^{(3)}(x) = 6$, $h^{(k)}(x) = 0$ ($k \geq 4$) および $g^{(n)}(x) = e^x$ である。よって

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} g^{(n)}(x) h(x) + \binom{n}{1} g^{(n-1)}(x) h^{(1)}(x) + \binom{n}{2} g^{(n-2)}(x) h^{(2)}(x) + \binom{n}{3} g^{(n-3)}(x) h^{(3)}(x) \\ &= e^x x^3 + n e^x 3x^2 + \frac{n(n-1)}{2} e^x 6x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} e^x 6 \\ &= (x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)) e^x \end{aligned}$$

となる。

(3) ライブニッツの定理を用いてもよいが、何回か微分してみる。 $f'(x) = 3x^2 \log x + x^2$, $f''(x) = 6x \log x + 5x$, $f^{(3)}(x) = 6 \log x + 11$, $f^{(4)}(x) = \frac{6}{x}$ となる。4 次以上の導関数について $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$ を用いると、次が得られる。

$$f'(x) = 3x^2 \log x + x^2$$

$$f''(x) = 6x \log x + 5x$$

$$f^{(3)}(x) = 6 \log x + 11$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n 6(n-4)! \frac{1}{x^{n-3}} \quad (n \geq 4)$$

$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$ を数学的帰納法で証明する。 $n=1$ のときは

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = (-1)^1 1! x^{-(1+1)}$$

より成立している。 $n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)} = (-1)^k k! x^{-(k+1)}$ の成立を仮定する。両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\right)^{(k+1)} &= \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}\right)' = \left((-1)^k k! x^{-(k+1)}\right)' \\ &= -(-1)^k k! (k+1) x^{-(k+1)-1} = (-1)^{k+1} (k+1)! x^{-((k+1)+1)}\end{aligned}$$

となるので $n = k + 1$ でも成立している。

(4) $f(x) = (x+1)^{-1}$ なので $f'(x) = -(x+1)^{-2}$, $f''(x) = 2(x+1)^{-3}$, $f'''(x) = -6(x+1)^{-4} = -3!(x+1)^{-4}$ となるので $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! (x+1)^{-(n+1)}$ と予想できる。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。予想が正しくない場合は「証明」の途中で辻褃が合わなくなるので、予想が間違っていることに気がつく。

$n = 1$ のときは $f'(x) = -(x+1)^{-2} = (-1)^1 1! (x+1)^{-(1+1)}$ なので予想は正しい。 $n = k$ のとき成立を仮定する。即ち

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k! (x+1)^{-(k+1)}$$

を仮定する。この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^k k! (x+1)^{-(k+1)}\right)' \\ &= (-1)^k k! (-k-1) (x+1)^{-(k+2)} \\ &= (-1)^{k+1} (k+1)! (x+1)^{-((k+1)+1)}\end{aligned}$$

となり $n = k + 1$ のときも予想が正しいことがわかる。

(5) $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $f''(x) = -(x+1)^{-2}$, $f^{(3)}(x) = 2(x+1)^{-3}$, $f^{(4)}(x) = -6(x+1)^{-4}$ なので

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} (n-1)! (x+1)^{-n}$$

と予想できる。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。

$n = 1$ のとき

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (-1)^{1+1} (1-1)! (x+1)^{-1}$$

なので予想は正しい。 $n = k$ のとき予想が正しいと仮定する。即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} (k-1)! (x+1)^{-k}$ の成立を仮定する。このとき $f^{(k)}(x)$ を x で微分すると、

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\ &= \left((-1)^{k+1} (k-1)! (x+1)^{-k}\right)' \\ &= (-1)^{k+1} (k-1)! (-k) (x+1)^{-k-1} \\ &= (-1)^{(k+1)+1} ((k+1)-1)! (x+1)^{-(k+1)}\end{aligned}$$

となるので $k + 1$ のときも成立する。

(6) 部分分数展開して

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

とできるので

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}n! \frac{1}{x^{n+1}} + (-1)^n n! \frac{1}{(x-1)^{n+1}}$$

と予想される。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。 $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\frac{1}{x}\right)' + \left(\frac{1}{x-1}\right)' \\ &= x^{-2} - (x-1)^{-2} \\ &= (-1)^2 1! \frac{1}{x^{1+1}} + (-1)^1 1! \frac{1}{(x-1)^{1+1}} \end{aligned}$$

なので成立している。 $n=k$ のとき成立を仮定する。即ち

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}k! \frac{1}{x^{k+1}} + (-1)^k k! \frac{1}{(x-1)^{k+1}}$$

の成立を仮定する。 $f^{(k)}(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\ &= (-1)^{k+1}k! \left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)' + (-1)^k k! \left(\frac{1}{(x-1)^{k+1}}\right)' \\ &= (-1)^{k+1}k! \frac{-(k+1)}{x^{k+2}} + (-1)^k k! \frac{-(k+1)}{(x-1)^{k+2}} \\ &= (-1)^{k+1+1}(k+1)! \frac{1}{x^{(k+1)+1}} + (-1)^{k+1}(k+1)! \frac{1}{(x-1)^{(k+1)+1}} \end{aligned}$$

となる。よって $k+1$ のときも成立している。

(7) $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$ より

$$f^{(4m)}(x) = \sin x, \quad f^{(4m+1)}(x) = \cos x, \quad f^{(4m+2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4m+3)}(x) = -\cos x$$

となる。場合分けによらない書き方もある。 $f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ となる。2 階以上も同様に $f''(x) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{(3)}(x) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$ となる。一般に

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

とも表すことができる。

$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ が成立することを数学的帰納法で示す。 $n=0$ のとき

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \sin x = \sin\left(x + \frac{0\pi}{2}\right)$$

より成立している。 $n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ を仮定する。両辺を x で微分すると

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right)'$$

$$= \sin \left(\left(x + \frac{k\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(x + \frac{(k+1)\pi}{2} \right)$$

となる。よって $n = k + 1$ でも成立している。

(8) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ となる。前問の結果 $[(\sin x)^{(n)} = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)]$ より

$$(\sin 2x)^{(n)} = 2^n \sin \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right)$$

と予想できる。

$n = 1$ のとき

$$(\sin 2x)' = 2 \cos 2x = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$$

なので成立している。 $n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $(\sin 2x)^{(k)} = 2^k \sin \left(2x + \frac{k\pi}{2} \right)$ を仮定する。

$$\begin{aligned} (\sin 2x)^{(k+1)} &= \left((\sin 2x)^{(k)} \right)' = \left(2^k \sin \left(2x + \frac{k\pi}{2} \right) \right)' \\ &= 2^k \cdot 2 \sin \left(2x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2^{k+1} \sin \left(2x + \frac{(k+1)\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

なので $n = k + 1$ のときも成立する。よって

$$(\sin x \cos x)^{(n)} = 2^{n-1} \sin \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right)$$

である。

演習問題 1.16 定理 1.27 の (1),(2) の 2) の場合を証明せよ。

$f^{(n)}$ 連続かつ $f^{(n)}(a) < 0$ なので a を含むある区間 $(a - \delta, a + \delta)$ において $f^{(n)}(x) < 0$ となる。この区間内の x についてテーラーの定理を適用すると $f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ なので $f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$ となる。(1) 即ち n が偶数の場合 $x \neq a$ ならば $(x-a)^n > 0$ なので、 $f(x) - f(a) < 0$ 即ち $f(x) < f(a)$ となる。よって f は $x = a$ で極大である。(2) 即ち n が奇数の場合 $x > a$ なら $(x-a)^n > 0$ 、 $x < a$ ならば $(x-a)^n < 0$ である。よって $x > a$ ならば $f(x) < f(a)$ 、 $x < a$ ならば $f(x) > f(a)$ となっている。

演習問題 1.17 $f(x) = e^x$ を $a = 0, n = 6$ としてテイラーの定理を用いて表し、その剰余項 R_6 を切り捨てることにより $\frac{1}{\sqrt{e}}$ の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。

更に同様な方法で誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決め近似値を求めよ。計算実行には電卓等を用いてよい

$f(x) = e^x$ とすると $f^{(n)}(x) = e^x$ なので

$$f(x) = \sum_{k=0}^5 \frac{1}{k!} x^k + R_6 \quad (R_6 = \frac{e^c}{6!} x^6)$$

となる。ここで c は $x > 0$ なら $0 < c < x$, $x < 0$ なら $x < c < 0$ を満たす。 $g(x) = \sum_{k=0}^5 \frac{1}{k!} x^k$ と

すると $\frac{1}{\sqrt{e}}$ の近似値は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{e}} &\doteq g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{5!} \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{2329}{3840} = 0.606510416 \end{aligned}$$

となる。 $-\frac{1}{2} < c < 0$ なので $0 < e^c < e^0 = 1$ となる。よって誤差は

$$|\Delta| = |R_6| = \left| \frac{e^c}{6!} \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \right| < \frac{1}{6!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{46080} = 2.17013888888889 \times 10^{-5}$$

と評価できる。

剰余項 R_n は

$$|R_n| = \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} h^n \right| = \frac{e^c}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-10}$$

を満たしていればよい。不等式を計算すると $n! \cdot 2^n > 10^{10}$ となる。 $n = 11$ のとき

$$11! \cdot 2^{11} = 81749606400 > 10^{10}$$

となるので $g_{10}(x) = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} x^k$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \doteq g_{10}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2253801941}{3715891200} = 0.6065306597243751$$

演習問題 1.18 $f(x) = \cos x$ を $a = 0, n = 6$ としてテイラーの定理を用いて表し, その剰余項 R_6 を切り捨てることにより $\cos \frac{\pi}{10}$ の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。

更に同様な方法で誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決め近似値を求めよ。計算実行には電卓等を用いてよい。

$f(x) = \cos x$ とおくと $f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f^{(3)}(x) = \sin x, f^{(4)}(x) = \cos x, f^{(5)}(x) = -\sin x, f^{(6)}(x) = -\cos x$ なので $f(0) = 1, f''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 1, f^{(6)}(0) = -1, f'(0) = f^{(3)}(0) = f^{(5)}(0) = 0$ となる。

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + R_6 \quad \left(R_6 = \frac{-\cos c}{6!} x^6 \right)$$

$g(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$ とおくと $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ の近似値は

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \doteq g\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 0.9510578492071949$$

となる。 $f^{(6)}(x) = -\cos x$ なので $|f^{(6)}(c)| \leq 1$ となっている。よって誤差は

$$|\Delta| = \left| \frac{-\cos c}{6!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^6 \right| \leq \frac{1}{6!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < \frac{1}{6!} \left(\frac{4}{10}\right)^6 = 5.688889 \times 10^{-6}$$

と評価できる。

$f^{(n)}(x)$ は $\pm \cos x, \pm \sin x$ のいずれかなので $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ が成立する。剰余項 R_n は

$$|R_n| = \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} h^n \right| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^n < \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-10}$$

を満たしていればよい。不等式は $n! \times \left(\frac{5}{2}\right)^n > 10^{10}$ となる。 $n = 10$ のとき

$$10! \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{10} = \frac{138427734375}{4} = 3.460693359375 \times 10^{10} > 10^{10}$$

となるので $g_9(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8$ とおくと

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \doteq g_9\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0.9510565162977323$$

演習問題 1.19 次の関数の $a = 0$ におけるテーラー級数を求めよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。この問題のテーラー級数は $-1 < x < 1$ の場合のみ考える。一般の実数 α と自然数 n に対し

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n \geq 1), \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

と定義する。これは α が自然数の場合の 2 項係数の拡張になっている。

(1) $f(x) = \log(1+x)$

(2) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

(3) $f(x) = \sqrt{1+x}$

(4) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

(5) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(1) $f(x) = \log(1+x)$ に対しては, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, と

なる。 n 次導関数は $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

(a) $n = 1$ のとき :

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^{1+1} \frac{(1-1)!}{(1+x)^1}$$

なので $n = 1$ のとき予想は正しい。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ の成立を仮定する。 $f^{(k)}(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x) \right)' = \left((-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \right)' \\ &= (-1)^{k+1} (k-1)! \frac{-k}{(1+x)^{k+1}} \\ &= (-1)^{(k+1)+1} \frac{k!}{(1+x)^{k+1}} \\ &= (-1)^{(k+1)+1} \frac{((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}} \end{aligned}$$

が得られるので、 $k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

が成立する。

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+0)^k} = (-1)^{k+1} (k-1)! \text{ (この式は } k=0 \text{ のとき成立しないことに注意!) ,}$$

および $f(0) = \log(1+0) = \log 1 = 0$ なので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k \\ &= f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^{k+1} (k-1)! x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} x^k \end{aligned}$$

となる。 \sum を用いず

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{k}x^k + \dots$$

という書き方でもよい。

数学的帰納法の形式だけを書いて実際は何も証明していない、間違った証明をする学生がいる。この問題の数学的帰納法の部分の**間違った「証明」**を次に書く。間違いを見つけられない人は、理解している友達か私に質問して下さい。

n 次導関数は $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

(a) $n = 1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^{1+1} \frac{(1-1)!}{(1+x)^1}$$

なので $n = 1$ のとき予想は正しい。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ の成立を仮定する。 n に $k+1$ を代入すると

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{(k+1)+1} \frac{((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}}$$

が得られるので、 $k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

が成立する。

(2) $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, $f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$ となる。 n 次導関数は $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ と予想される。

(a) $n = 1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}}$$

なので $n = 1$ のとき予想は正しい。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ の成立を仮定する。 $f^{(k)}(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x) \right)' = \left(\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \right)' \\ &= k! \frac{-(k+1)(-1)}{(1-x)^{k+2}} \\ &= \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}} \end{aligned}$$

が得られるので、 $k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

が成立する。

0 以上の整数 k に対し $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = k!$ 、が成立するので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} k! x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \end{aligned}$$

となる。

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots$$

という書き方でもよい。

$$(3) \quad f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}, \quad f''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-2},$$
$$f'''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-3}, \text{ となる。 } n \text{ 次導関数は}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - (n-1) \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$
$$= n! \binom{\frac{1}{2}}{n} (1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

と予想される。

(a) $n = 1$ のとき :

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-1} = 1! \binom{\frac{1}{2}}{1} (1-x)^{\frac{1}{2}-1}$$

なので $n = 1$ のとき予想は正しい。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する ; 即ち $f^{(k)}(x) = k! \binom{\frac{1}{2}}{k} (1+x)^{\frac{1}{2}-k}$ の成立を仮定する。 $f^{(k)}(x)$ を微分すると ,

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x) \right)'$$
$$= k! \binom{\frac{1}{2}}{k} \left((1+x)^{\frac{1}{2}-k} \right)'$$
$$= k! \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{1}{2} - k \right) \left((1+x)^{\frac{1}{2}-(k+1)} \right)$$

となるが

$$k! \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{1}{2} - k \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1 \right) \left(\frac{1}{2} - k \right)$$
$$= (k+1)! \frac{\frac{1}{2}}{1} \frac{\left(\frac{1}{2} - 1 \right)}{2} \cdots \frac{\left(\frac{1}{2} - k + 1 \right)}{k} \frac{\left(\frac{1}{2} - (k+1) + 1 \right)}{k+1}$$
$$= (k+1)! \binom{\frac{1}{2}}{k+1}$$

となるので

$$f^{(k+1)}(x) = (k+1)! \binom{\frac{1}{2}}{k+1} \left((1+x)^{\frac{1}{2}-(k+1)} \right)$$

が得られ, $k+1$ のときも成立している。よって自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = n! \binom{\frac{1}{2}}{n} (1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

が成立する。

$$f^{(k)}(0) = k! \binom{\frac{1}{2}}{k} \quad (k \geq 1), f(0) = 1 \text{ なので } f^{(k)}(0) = k! \binom{\frac{1}{2}}{k} \quad (k \geq 0) \text{ となる。}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} k! \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k \end{aligned}$$

となる。

${}_a P_n = n! \binom{\alpha}{n}$ という記号がありこれを用いると

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} P_n x^{\frac{1}{2}-n}$$

と書ける。

(4) n 次導関数を計算してもできるが、ここでは異なる方法で求めてみる。 x を $-1 < x < 1$ を満たす実数とする。初項 1 公比 $-x$ の等比数列の和を考えると

$$\frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 - (-x)} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n$$

が成立する。ここで $n \rightarrow \infty$ とすると $(-x)^n \rightarrow 0$ なので

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

となる。

(5) n 次導関数を求めなくても、 $f^{(n)}(0)$ が求まればよいことに注目する。

$$f(x)(1+x^2) = 1$$

と変形して両辺を n 回微分する。 $1+x^2$ は 3 回以上微分すると 0 になることに注意するとライプニッツの定理より

$$f^{(n)}(x)(1+x^2) + {}_n C_1 f^{(n-1)}(x)2x + {}_n C_2 f^{(n-2)}(x)2 = 0$$

となる。 $x=0$ を代入することにより、 $f^{(n)}(0) + n(n-1)f^{(n-2)}(0) = 0$ を得る。 $f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 2$ より

$$f^{(2n-1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n (2n)!$$

が成立することが予想される。

まず奇数の場合を証明する。即ち「 $\forall n \in \mathbb{N} f^{(2n-1)}(0) = 0$ 」を示す。

(a) $n=1$ のとき; $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ なので $f'(0) = 0$ となり、成立している。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する; 即ち $f^{(2k-1)}(0) = 0$ を仮定する。任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(0) + n(n-1)f^{(n-2)}(0) = 0$ が成立しているので、 $n-2 = 2k-1$ とすると

$$f^{2k+1}(0) + (2k+1)2k f^{2k-1}(0) = 0$$

が得られる。よって $f^{2(k+1)-1}(0) = f^{2k+1}(0) = 0$ となり, $k+1$ のときも成立している。

次に偶数の場合を証明する。即ち即ち「 0 以上の自然数 n に対し $f^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!$ 」を示す。

(a) $n = 0$ のとき; $f^{(0)}(0) = f(0) = \frac{1}{1+0^2} = (-1)^0(2 \cdot 0)!$ なので成立している。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する; 即ち $f^{(2k)}(0) = (-1)^k(2k)!$ を仮定する。任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(0) + n(n-1)f^{(n-2)}(0) = 0$ が成立しているので, $n-2 = 2k$ とすると

$$f^{2k+2}(0) + (2k+2)(2k+1)f^{2k}(0) = 0$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} f^{2(k+1)}(0) &= -(2k+2)(2k+1)f^{2k}(0) \\ &= -(2k+2)(2k+1)(-1)^k(2k)! \\ &= (-1)^{k+1}(2(k+1))! \end{aligned}$$

となり, $k+1$ のときも成立している。

よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0)x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(0)x^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0)x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k(2k)!x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \end{aligned}$$

を得る。

別の方法: (4) の

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

の x に x^2 を代入して

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

を得る。

演習問題 1.20 次の関数を $x = a$ でテーラー (級数) 展開せよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x) = x^5 \quad (a = 1)$

(2) $f(x) = e^x \quad (a = 1)$

(3) $f(x) = \sin x \quad (a = \pi)$

(4) $f(x) = \log x \quad (a = 1)$

(1) 導関数を求めてもよいが，多項式なので

$$\begin{aligned}x^5 &= \left((x-1) + 1 \right)^5 \\ &= 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5\end{aligned}$$

と 2 項展開してもよい。

(2) $f(x) = e^x$ とおくと， $f'(x) = e^x$ である。よって何回微分しても

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

となる。そこまでやる必要はないかもしれないが，一応数学的帰納法でこの事実を確認しておく。
示すべき命題は「 $\forall n \in \mathbb{N} f^{(n)}(x) = e^x$ 」である。

(a) $n = 1$ のとき $f^{(1)}(x) = f'(x) = e^x$ なので成立している。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)} = e^x$ を仮定する。このとき

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)}(x))' \\ &= (e^x)' = e^x\end{aligned}$$

よってテーラー級数は

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1)(x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!} (x-1)^k\end{aligned}$$

となる。

(3) $f(x) = \sin x$ とおくと $f'(x) = \cos x$ ， $f''(x) = -\sin x$ ， $f'''(x) = -\cos x$ ， $f^{(4)}(x) = \sin x$ となり，以下周期 4 で同じものが続く。よって

$$f^{2n}(x) = (-1)^n \sin x, \quad f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n+1} \cos x$$

と予想される。

まず偶数の場合を証明する。即ち即ち「0 以上の自然数 n に対し $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ 」を示す。

(a) $n = 0$ のとき； $f^{(0)}(x) = f(x) = \sin x = (-1)^0 \sin x$ なので成立している。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$ を仮定する。

$$\begin{aligned}f^{2(k+1)}(x) &= \left((f^{(2k)}(x))' \right)' \\ &= \left(((-1)^k \sin x)' \right)' = ((-1)^k \cos x)' \\ &= (-1)^k (-\sin x) \\ &= (-1)^{k+1} \sin x\end{aligned}$$

となり， $k+1$ のときも成立している。

次に奇数の場合を証明する。即ち「 $\forall n \in \mathbb{N} f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n+1} \cos x$ 」を示す。

(a) $n = 1$ のとき ; $f'(x) = (\sin x)' = \cos x = (-1)^{1+1} \cos x$ なので成立している。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する ; 即ち $f^{(2k-1)}(x) = (-1)^{k+1} \cos x$ を仮定する。

$$\begin{aligned} f^{(2(k+1)-1)}(x) &= \left(\left(f^{(2k-1)}(x) \right)' \right)' \\ &= \left(\left((-1)^{k+1} \cos x \right)' \right)' = \left((-1)^{k+1} (-\sin x) \right)' \\ &= (-1)^{k+1} (-\cos x) \\ &= (-1)^{(k+1)+1} \cos x \end{aligned}$$

となり, $k+1$ のときも成立している。 $f^{(2k)}(\pi) = (-1)^k \sin \pi = 0$, $f^{(2k-1)}(\pi) = (-1)^{k+1} \cos \pi = (-1)^{k+1}(-1) = (-1)^k$, なので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\pi)(x-\pi)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(\pi)(x-\pi)^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(\pi)(x-\pi)^{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(\pi)(x-\pi)^{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} (-1)^k (x-\pi)^{2k-1} \end{aligned}$$

を得る。

(4) $f(x) = \log x$ に対しては, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, となる。 n 次導関数は

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

(a) $n = 1$ のとき :

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{x} = (-1)^{1+1} \frac{(1-1)!}{x^1}$$

なので $n = 1$ のとき予想は正しい。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する ; 即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{x^k}$ の成立を仮定する。 $f^{(k)}(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x) \right)' = \left((-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{x^k} \right)' \\ &= (-1)^{k+1} (k-1)! \frac{-k}{x^{k+1}} \\ &= (-1)^{(k+1)+1} \frac{((k+1)-1)!}{x^{k+1}} \end{aligned}$$

が得られるので, $k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

が成立する。

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k+1} (k-1)!, \text{ および } f(1) = \log 1 = 0 \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1) (x-1)^k \\ &= f(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^{k+1} (k-1)! (x-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} (x-1)^k \end{aligned}$$

となる。

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

とテーラー展開されているときには $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ である。 n 次導関数を求めなくとも何らかの方法で求めてもよい。

例えば、演習問題 1.19 (2) では等比数列の和から求めることもできる。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

が得られているとき、この式の x に $-x$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} \\ &= 1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n + \cdots \\ &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \end{aligned}$$

となり (4) を得る。更にこの式に x^2 を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1+(x^2)} \\ &= 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} \cdots \end{aligned}$$

となり (5) を得るがこれはすでに紹介してある。

演習問題 *1.21 次を示せ。 $1 \leq p \leq n$ を満たす実数 p に対し

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{p(n-1)!} (x-a)^n$$

を満たす θ ($0 < \theta < 1$) が存在する。 $R_n = \frac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{p(n-1)!} (x-a)^n$ をロシュの剰余項と呼ぶ。 $p = n$ とすると定理 1.25 の剰余項になる。これをラグランジェの剰余項という。 $p = 1$ としたものをコーシーの剰余項と呼ぶ。

定理 1.25 の証明と少し異なるがほぼ平行に議論が進む。

$$A = \frac{(n-1)!}{(x-a)^p} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right)$$

$$F(t) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k + A \frac{(x-t)^p}{(n-1)!} \right)$$

とおくと $F(x) = f(x) - f(x) = 0$,

$$F(a) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k - \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right) \right) = 0$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t) &= - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k + A \frac{(x-t)^p}{(n-1)!} \right)' \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k(x-t)^{k-1} \right) + A \frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k(x-t)^{k-1} + A \frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} + A \frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k + A \frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\ &= - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} + A \frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\ &= \left(Ap - f^{(n)}(t)(x-t)^{n-p} \right) \frac{(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

$F'(a + \theta(x-a)) = 0$ となる θ ($0 < \theta < 1$) が存在するので

$$Ap - f^{(n)}(a + \theta(x-a))(x - (a + \theta(x-a)))^{n-p} = 0$$

より結論が得られる。

演習問題 *1.22 次の関数がテーラー級数展開可能であること, 即ち剰余項 R_n に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ が成立することを示せ。最初の 3 つの式は任意の x について成立するが, 最後の 2 つには制限がつく。

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots + \frac{1}{k!} x^k + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + \cdots$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k} x^k + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

ここではすでにそれぞれの関数の n 次導関数は既知とする。即ち

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(\log x)^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! (x+1)^{-n}$$

$$((1+x)^\alpha)^{(n)} = n! \binom{\alpha}{n} (1+x)^{\alpha-n}$$

は既知とする。また前期の極限の所でやった

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

も既知とする。本問では $a = 0$ におけるテーラー展開なので剰余項は

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n$$

である。

$f(x) = e^x$ のとき, $f(x)$ は単調増加なので $|f^{(n)}(\theta x)| = |e^{\theta x}| \leq e^{|x|}$ が成立するので

$$|R_n| \leq \frac{e^{|x|} |x|^n}{n!}$$

となり $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{|x|} |x|^n}{n!} = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ となる。

$f(x) = \sin x$ のとき $|f^{(n)}(\theta x)| = \left| \sin\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right) \right| \leq 1$ なので

$$|R_n| \leq \frac{|x|^n}{n!}$$

となり $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ となる。

$f(x) = \cos x$ のとき $|f^{(n)}(\theta x)| = \left| \cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right) \right| \leq 1$ なので

$$|R_n| \leq \frac{|x|^n}{n!}$$

となり $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ となる。

$f(x) = \log(1+x)$ のとき剰余項としてコーシーの剰余項を採用する。今 $a = 0$ なので

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!} x^n \\ &= \frac{(1-\theta)^{n-1} (-1)^{n-1} (n-1)!}{(\theta x + 1)^n (n-1)!} x^n \end{aligned}$$

である。 $0 < \theta < 1, -1 < x < 1$ より $-\theta < \theta x < \theta$ であり、辺々に 1 を加えて $0 < 1 - \theta < 1 + \theta x$ を得る。よって

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$$

となる。また $1 + \theta x > 1 - |x| > 0$ なので

$$\begin{aligned} |R_n| &= \left| \frac{(1-\theta)^{n-1} (-1)^{n-1} (n-1)!}{(\theta x + 1)^n (n-1)!} x^n \right| \\ &= \frac{|x|^n}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1} < \frac{|x|^n}{1+\theta x} < \frac{|x|^n}{1-|x|} \end{aligned}$$

となるので $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ となる。

$f(x) = (1+x)^\alpha$ のときも剰余項としてコーシーの剰余項を採用する。今 $a = 0$ なので

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!} x^n \\ &= \frac{(1-\theta)^{n-1} n! \binom{\alpha}{n} (1+\theta x)^{\alpha-n}}{(n-1)!} x^n \\ &= n \binom{\alpha}{n} x^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1} (1+\theta x)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

である。 $\alpha \geq 1$ のとき $(1+\theta x)^{\alpha-1} \leq (1+|x|)^{\alpha-1}$ であり、 $\alpha < 1$ のとき $(1+\theta x)^{\alpha-1} \leq (1-|x|)^{\alpha-1}$ のなのでいずれの場合も θ に関係のない定数 M で $(1+\theta x)^{\alpha-1} \leq M$ とできる。また全問と同様に $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ が成立するので、

$$|R_n| \leq n \binom{\alpha}{n} |x|^n$$

となる。 $c_n = n \binom{\alpha}{n} |x|^n$ と置くと $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ が示されれば証明が終わる。ここで後で証明するが、次の結果を使う。

$\{c_n\}$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = c$ が存在して $0 \leq c < 1$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ である。

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\alpha - n}{n} |x|$$

なので $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = |x| < 1$ となる。

最後に途中で使った結果を示す。 $c < 1$ なので $\varepsilon = \frac{1-c}{2}$ に対しある自然数 N が存在して任意の自然数 n に対し

$$n > N \implies \left| \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} - c \right| < \varepsilon$$

が成立する。このとき $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} - c < \varepsilon$ より $|c_{n+1}| < (c + \varepsilon)|c_n|$ となる。 $d = c + \varepsilon$ とおくと $0 < d < 1$ であり $|c_{n+1}| < d|c_n|$ が成立している。よって $n > N$ となる n に対し $|c_n| < d^{n-N}|c_N|$ が成立するので $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ となる。

演習問題 *1.23 次の関数は何回でも微分可能であるが、 $x = 0$ でテーラー級数展開可能でないことを次に示して示せ。

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

(1) $g(t)$ を n 次の多項式とすると $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{e^t} = 0$ が成立することを n に関する数学的帰納法で示せ ($n = 0$ から始めること)。

(2) $f^{(n)}(x)$ はある多項式 $P_n(t)$ を用いて

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

と表されることを n に関する数学的帰納法で示せ ($n = 0$ から始めること)。

(3) $f(x)$ が $x = 0$ でテーラー級数展開可能だと仮定すると矛盾することを示せ。

(1) $n = 0$ のとき 0 次式は定数なので $g(t) = a$ とする。 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a}{e^t} = 0$ なので成立している。

$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち k 次式 $g(t)$ に関しては $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{e^t} = 0$ が成立していることを仮定する。 $g(t)$ を任意の $k + 1$ 次式とする。ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g'(t)}{(e^t)'} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g'(t)}{e^t}$$

となるが $g'(t)$ は k 次式なので $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g'(t)}{e^t} = 0$ である。よって $k + 1$ のときも成立し、数学的帰納法により 0 以上のすべての整数で成立する。

(2) $n = 0$ のときは $f^{(0)}(x) = f(x)$ なので $P_0(t) = 1$ とおくと成立している。

$n = k$ での成立を仮定する。 $x > 0$ では $f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ となっているので、 $x > 0$ のときは

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}\right)' = P_k'\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} + P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(-P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

となるので $P_{k+1}(t) = t^2(-P'_k(t) + P_k(t))$ とおくと $f^{(k+1)}(x) = P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ となっている。

$x < 0$ のときは $f^{(k)}(x) = 0$ なので $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' = 0$ である。

$x = 0$ のとき

$$\begin{aligned} f_+^{(k+1)}(0) &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f^{(k)}(h) - f^{(k)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f^{(k)}(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} P_k\left(\frac{1}{h}\right) e^{-\frac{1}{h}} \quad (\text{ここで } t = \frac{1}{h} \text{ とおく}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t P_k(t)}{e^t} \end{aligned}$$

となるが $t P_k(t)$ は多項式なので極限值は 0 になる。一方

$$f_-^{(k+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f^{(k)}(h) - f^{(k)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

となるので $f^{(k+1)}(0) = f_+^{(k+1)}(0) = f_-^{(k+1)}(0) = 0$ となる。以上で $k+1$ のときの成立が示されたので、数学的帰納法により 0 以上の整数で成立する。

(3) (2) で示したことからすべての 0 以上の整数 n に対し $f^{(n)}(0) = 0$ が成立している。 $f(x)$ が $x = 0$ でテーラー級数展開可能だと仮定すると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} x^k = 0$$

となり恒等的に 0 になるが $f(x)$ はそうでないので矛盾。よってテーラー級数展開可能ではない。

演習問題 1.24 テーラー級数を用いて次の極限值を求めよ。それぞれの関数のテーラー級数は既知としてよい。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

(1)

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} x \cos x &= x - \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{4!}x^5 - \dots \\ \sin x - x \cos x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots - \left(x - \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{4!}x^5 - \dots \right) \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{30}x^2 + \dots$$

となるので

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

である。

(2)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

なので

$$\frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}x + \frac{1}{4!}x^2 + \dots$$

$x \rightarrow \infty$ のとき第 1 項, 第 2 項は $\rightarrow 0$ だが, 第 4 項以降はすべて $\rightarrow \infty$ で, 各項の和なので

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$$

(3)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

より

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} &= \frac{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots - \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots\right)}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots} \\ &= \frac{2x + \frac{2}{3!}x^3 + \dots}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots} = \frac{2 + \frac{2}{3!}x^2 + \dots}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^1 + \dots} \end{aligned}$$

なので

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} = 2$$

(4)

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \dots$$

より

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \frac{\left(\frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \dots\right)}{x} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x + \dots \end{aligned}$$

なので

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

(5)

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

より

$$\frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \dots$$

なので

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(6)

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots$$

より

$$\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6} \frac{1}{x^3} + \frac{1}{120} \frac{1}{x^5} - \dots$$

なので

$$x \sin \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{6} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{120} \frac{1}{x^4} - \dots$$

となる。よって

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$$