

演習問題 1.25 次の関数のグラフの凹凸を調べ概形を描け。

(1)  $f(x) = 2x^2 - x^4$

(2)  $f(x) = xe^{-x}$

(3)  $f(x) = x^2 \log x$

(4)  $f(x) = 3 \sin x + \sin 3x$

(5)  $f(x) = x - \sqrt{1+x}$

(6)  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

(7)  $f(x) = x + 2 \cos x$

(8)  $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$

(9)  $f(x) = x^{-x^2}$

(10)  $y = (x - 5)^4(x + 1)^3$

(11)  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

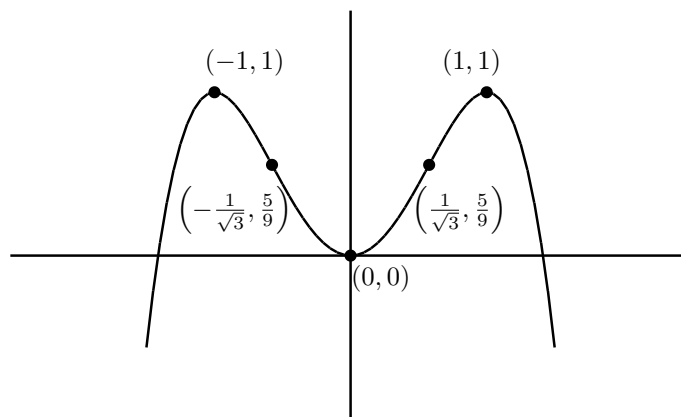
(12)  $y = e^{-x^2}$

(13)  $y = x \log x$

(1)  $f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 4x(1 - x)(1 + x)$  なので  $f'(x) = 0$  となるのは  $x = -1, 0, 1$  である。 $f''(x) = 4 - 12x^2 = 4(1 - 3x^2)$  なので  $f''(x) = 0$  となるのは  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  である。増減表は次のようになる。

$x$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	↗	1	↘	$\frac{5}{9}$	↘	0	↗	$\frac{5}{9}$	↗	1	↘

$f(x) = 2x^2 - x^4 = 0$  を解くと  $x = 0, \pm\sqrt{2}$  となる。よって曲線は  $x$  軸と 3 点で交わっている。 $(x = 0$  は重解なので接している。) このことに注意して概形を描くと次図のようになる。

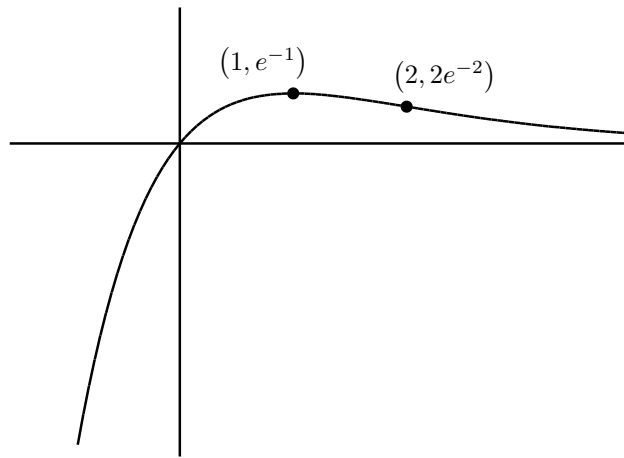


(2)  $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$  なので  $f'(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のときのみである。 $f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = (x - 2)e^{-x}$  なので  $f''(x) = 0$  となるのは  $x = 2$  のときである。増

減表は次のようになる。

$x$		1		2	
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	$e^{-1}$	↘	$2e^{-2}$	↘

$f(x) = xe^{-x} = 0$  のとき  $x = 0$  また  $f(0) = 0$  なので  $x$  軸,  $y$  軸との交点は原点のみ。  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  および  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  ということに注意してグラフを描くと次図のようになる。



(3)  $\log x$  が定義されるのは  $x > 0$  なので  $f(x)$  の定義域も  $x > 0$  である。  $f'(x) = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \log x + 1) = 0$  を解いて,  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$  を得る。  $f''(x) = 2 \log x + 2 + 1 = 2 \log x + 3$  なので  $f''(x) = 0$  となるのは  $x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$  である。 よって増減表は次の様になる。

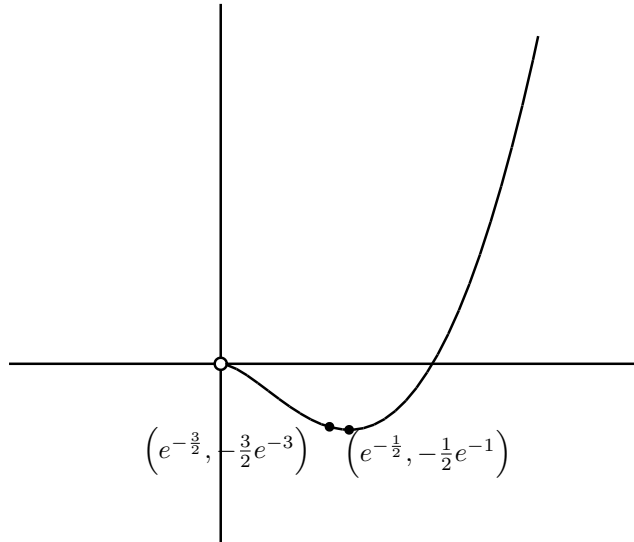
$x$		$\frac{1}{\sqrt{e^3}}$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	↘	$-\frac{3}{2e^3}$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

$x \rightarrow +0$  としたときの関数の挙動を調べる。ここでロピタルの定理を用いる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  であり、また  $f(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のときのみである。このことに注意してグラフを描くと次図の様になる。

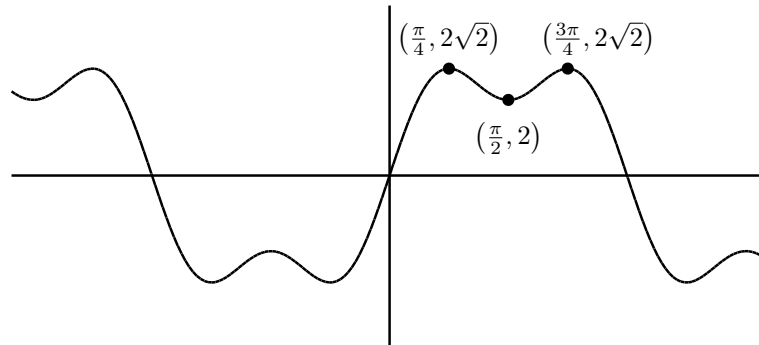


(4)  $\sin x$  は周期  $2\pi$  の周期関数であり、 $\sin 3x$  は周期  $\frac{2\pi}{3}$  の周期関数である。これより  $f(x)$  は周期  $2\pi$  の周期関数になる。また  $f(-x) = -f(x)$  が成立する。よって  $0 \leq x \leq \pi$  の範囲でグラフを描き、それを原点を中心に対称移動したグラフを描く。この  $-\pi \leq x \leq \pi$  のグラフを  $x$  軸の方向へ  $2n\pi$  ( $n$  は整数) 平行移動したグラフ全体が求めるグラフとなる。よって  $0 \leq x \leq \pi$  の範囲で調べる。

$f'(x) = 3 \cos x + 3 \cos 3x = 3 \cos x + 3(4 \cos^3 x - 3 \cos x) = 6 \cos x(2 \cos^2 x - 1)$  なので  $f'(x) = 0$  となるのは  $\cos x = 0$  または  $\cos^2 x = \frac{1}{2}$  なので、 $0 \leq x \leq \pi$  の範囲では  $x = \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi$  である。  
 $f''(x) = -3 \sin x - 9 \sin 3x = -6 \sin x(5 - 6 \sin^2 x)$  なので  $f''(x) = 0$  となるのは  $\sin x = 0$  または  $\sin^2 x = \frac{5}{6}$  である。 $\sin^2 x = \frac{5}{6}$  となる  $x$  の値は正確に求めることはできないが、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲で  $\sin x = \sqrt{\frac{5}{6}}$  となる  $x$  を  $\alpha$ 、 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$  の範囲で  $\sin x = \sqrt{\frac{5}{6}}$  となる  $x$  を  $\beta$  とすると、 $\sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{5}{6}} < 1$  より  $\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3}{4}\pi$  となっている。

よって増減表とグラフは次のようになる。

$x$	0		$\frac{1}{4}\pi$		$\alpha$		$\frac{1}{2}\pi$		$\beta$		$\frac{3}{4}\pi$		$\pi$
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-
$f''(x)$	0	-	-	-	0	+	+	+	0	+	+	+	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	↘	$\frac{8}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$	↘	2	↗	$\frac{8}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$	↗	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	↘	0



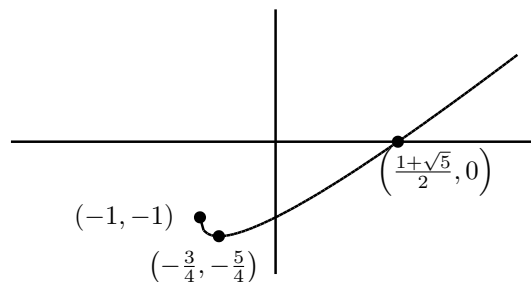
(5)  $f(x) = x - \sqrt{1+x}$  は  $1+x \geq 0$  で定義されている。  $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$  なので  $f'(x) = 0$  となるのは  $x = -\frac{3}{4}$  である。  $f''(x) = \frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$  より  $f''(x) = 0$  となることはない。 よって増減表は次のようになる。

$x$		$-\frac{3}{4}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f''(x)$	+	+	+
$f(x)$	↘	$-\frac{5}{4}$	↗

$f(x) = 0$  とすると  $x - \sqrt{1+x} = 0$  より  $x = \sqrt{1+x}$  となる。両辺を 2 乗して

$$x^2 = 1+x$$

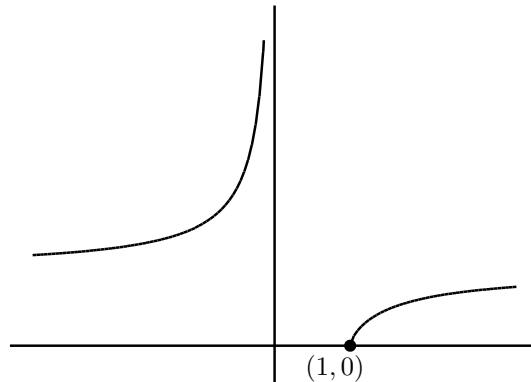
を得る。この 2 次方程式の解は  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  である。しかし  $x = \sqrt{1+x} \geq 0$  より  $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  は不適である。また  $f(0) = 0 - \sqrt{1+0} = -1$  である。以上のことに注意してグラフを描くと次図のようになる。



(6)  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$  なので  $1 - \frac{1}{x} \geq 0$  が必要である。  $x \geq 0$  のときは  $1 \geq \frac{1}{x}$  より  $x \geq 1$

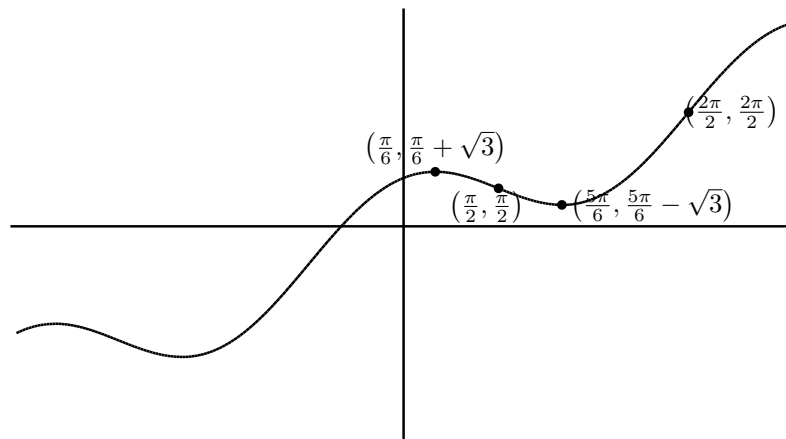
である。  $x < 0$  のときは常に  $1 - \frac{1}{x} \geq 0$  である。  $f'(x) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{x^2}$  は  $x = 1$  においては微分可能ではない。それ以外では  $f'(x) > 0$  である。

$$f''(x) = -\frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{x^4} - \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{x^4} (6x - 5)$$
より  $x < 0$  のとき  $f''(x) > 0$  であり,  $x > 1$  のとき  $f''(x) < 0$  となる。  $\lim_{h \rightarrow -0} f(x) = \infty$  ということに注意してグラフを描くと次図のようになる。



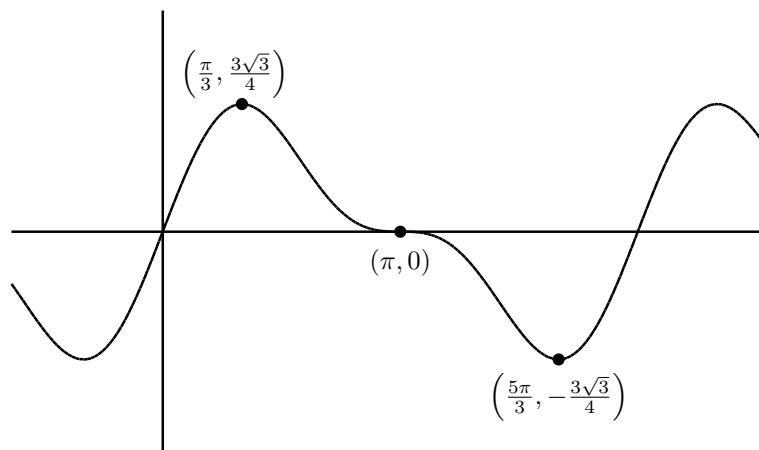
(7)  $f(x) = x + 2 \cos x$  なので  $f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi$  が成立する。  $0 \leq x \leq 2\pi$  でグラフを描いて, そのグラフを  $x$  軸方向に  $2n\pi$ ,  $y$  軸方向に  $2n\pi$  移動したものが関数のグラフになる (ここで  $n$  は整数)。  $f'(x) = 1 - 2 \sin x$  なので,  $f'(x) = 0$  となるのは  $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$  である。  $f''(x) = -2 \cos x$  なので  $f''(x) = 0$  となるのは  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  である。  
増減表とグラフは次のようになる。

$x$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$	
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	↗	$\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	↘	$\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗



(8)  $f(x)$  は周期  $2\pi$  の周期関数なので  $0 \leq x \leq 2\pi$  の範囲で考える。 $f'(x) = \cos x(1 + \cos x) - \sin^2 x = \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$  である。 $f'(x) = 0$  のとき  $\cos x + 1 = 0$  または  $2\cos x - 1 = 0$  なので、 $\cos x + 1 = 0$  のとき  $x = \pi$  であり、 $2\cos x - 1 = 0$  のとき  $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$  である。 $f''(x) = -\sin x(1 + 4\cos x)$  なので  $f''(x) = 0$  とすると  $\sin x = 0$  または  $1 + 4\cos x = 0$  である。 $\sin x = 0$  のとき  $x = 0, \pi, 2\pi$  となる。 $1 + 4\cos x = 0$  のときは、 $0 \leq x \leq \pi$  で  $\cos x = -\frac{1}{4}$  となる  $x$  を  $\alpha$ 、 $\pi \leq x \leq 2\pi$  で  $\cos x = -\frac{1}{4}$  となる  $x$  を  $\beta$  とすると  $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi < \beta < \frac{5\pi}{3}$  となる。増減表およびはグラフ次のようになる。

$x$	0		$\frac{\pi}{3}$		$\alpha$		$\pi$		$\beta$		$\frac{5\pi}{3}$		$2\pi$
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-	0	-	-	-	0	+	+
$f''(x)$	0	-	-	-	0	+	0	-	0	+	+	+	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$\frac{3\sqrt{15}}{16}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{15}}{16}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0



(9) この問題で凹凸も含めきちんと議論するのは難しい様です。凹凸の議論の部分は青で書いておきますので、興味のある人は参考にしてください。 $f(x) = x^{-x^2}$  なので定義域は  $x > 0$  である。導関数を求めるのに対数微分法を用いる。 $y = x^{-x^2}$  とすると  $\log y = -x^2 \log x$  である。両辺を  $x$  で微分すると  $\frac{1}{y} y' = -2x \log x - x^2 \frac{1}{x} = -2x \log x - 1$  なので  $y' = -x \cdot x^{-x^2} (2 \log x + 1)$  となる。 $f'(x) = 0$  とすると、 $2 \log x + 1 = 0$  なので  $x = e^{-\frac{1}{2}}$  となる。

$f''(x) = x^{-x^2} (x^2 (2 \log x + 1)^2 - (2 \log x + 1) - 2)$  となるが、 $f''(x) = 0$  を満たす  $x$  は2つあり、それを  $\alpha, \beta$  とするとき、 $\alpha < e^{-1/2} < \beta$  となっていることを示す。 $f''(x)$  の正負を判定するために、 $g(x) = x^2 (2 \log x + 1)^2 - (2 \log x + 1) - 2$  において、 $g(x)$  の正負を判定する。 $u = 2 \log x + 1$  とおくと  $x = e^{(u-1)/2}$  なので  $g(x)$  を  $u$  で書き直すと

$$g(x) = e^{u-1} u^2 - u - 2$$

となる。 $h(u) = e^{u-1} u^2 - u - 2$  とおく。 $x : 0 \rightarrow \infty$  のとき、 $u : -\infty \rightarrow \infty$  となる。 $h'(u) = e^{u-1} (u^2 + 2u) - 1$ 、 $h''(u) = e^{u-1} (u^2 + 4u + 2)$  である。 $h''(u) = 0$  のとき  $u = -2 \pm \sqrt{2}$  となる。

$u < -2 - \sqrt{2}$  のとき  $h''(u) < 0$ ,  $-2 - \sqrt{2} < u < -2\sqrt{2}$  のとき  $h''(u) > 0$ ,  $-2 + \sqrt{2} < u$  のとき  $h''(u) > 0$  である。よって  $h'(u)$  は  $u < -2 - \sqrt{2}$  のとき増加の状態にあり,  $-2 - \sqrt{2} < u < -2\sqrt{2}$  のとき減少の状態にあり,  $-2 + \sqrt{2} < u$  のとき増加の状態にある。 $h'(-2) < 0$ ,  $h'(0) < 0$ ,  $-2 < -2 + \sqrt{2} < 0$  より  $h'(-2 + \sqrt{2}) < 0$  が分かる。また

$$\begin{aligned} h'(-2 - \sqrt{2}) &= e^{-2-\sqrt{2}-1}(2+2\sqrt{2}) - 1 \\ &= \frac{2(1+\sqrt{2})}{e^{3+\sqrt{2}}} - 1 < \frac{2(1+\sqrt{2})}{e^3} - 1 \\ &= \frac{2}{e} \frac{1+\sqrt{2}}{e} \frac{1}{e} - 1 \\ &< \frac{1}{e} - 1 < 0 \end{aligned}$$

となるので, ある実数  $\gamma$  が存在して  $u < \gamma$  のとき  $h'(u) < 0$ ,  $u > \gamma$  のとき  $h'(u) > 0$  となっている。よって  $h(u)$  は  $u < \gamma$  で単調減少,  $u > \gamma$  で単調増加である。 $\lim_{u \rightarrow \infty} h(u) = \infty$ ,  $\lim_{u \rightarrow -\infty} h(u) = \infty$ ,  $h(0) = -2$  となるので, 実数  $\alpha', \beta'$  が存在して,  $\alpha' < 0 < \beta'$  かつ  $u < \alpha'$  のとき  $h(u) > 0$ ,  $\alpha' < u < \beta'$  のとき  $h(u) < 0$ ,  $\beta' < u$  のとき  $h(u) > 0$  となっている。 $\alpha = e^{(\alpha'-1)/2}$ ,  $\beta = e^{(\beta'-1)/2}$  とおくと  $\alpha < \frac{1}{\sqrt{e}} < \beta$  であり,  $x < \alpha$  のとき  $g(x) > 0$ ,  $\alpha < x < \beta$  のとき  $g(x) < 0$ ,  $\beta < x$  のとき  $g(x) > 0$  となる。

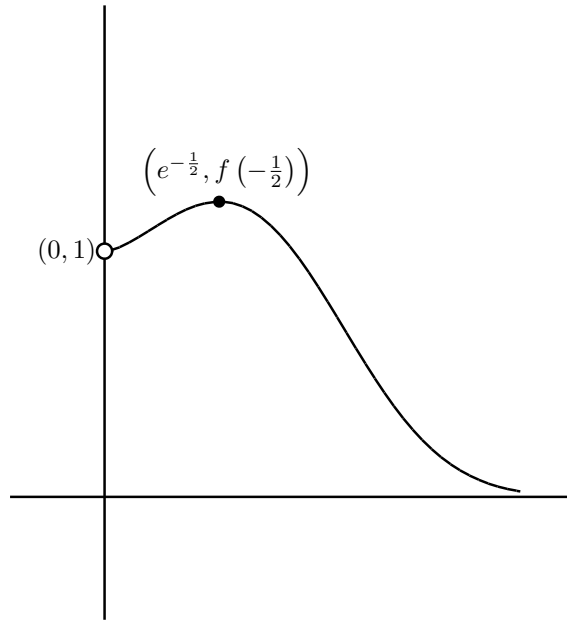
よって増減表は

$x$		$\alpha$		$e^{-\frac{1}{2}}$		$\beta$	
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗		↘	$f(e^{-\frac{1}{2}})$	↘		↘

となる。 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  である。また  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$  を求める。 $\log y = -x^2 \log x$  の極限を求める。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \log f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} (-x^2 \log x) = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-2 \frac{1}{x^3}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0 \end{aligned}$$

なので,  $0 = \lim_{x \rightarrow +0} \log f(x) = \log \left( \lim_{x \rightarrow +0} f(x) \right)$  となる。よって  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$  となる。以上を考慮してグラフを書くと次図のようになる。



(10)

$$\begin{aligned}
 y' &= 4(x-5)^3(x+1)^3 + 3(x-5)^4(x+1)^2 \\
 &= (x-5)^3(x+1)^2\{4(x+1) + 3(x-5)\} \\
 &= (x-5)^3(x+1)^2(7x-11)
 \end{aligned}$$

なので  $y' = 0$  を解いて  $x = -1, 5, \frac{11}{7}$  を得る。

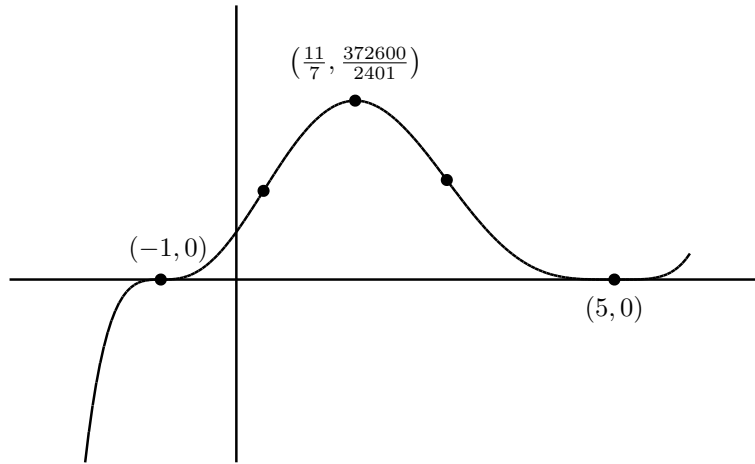
$$y'' = 6(x-5)^2(x+1)(7x^2 - 22x + 7)$$

なので  $y'' = 0$  を解いて  $x = -1, 5, \frac{11+6\sqrt{2}}{7}, \frac{11-6\sqrt{2}}{7}$  を得る。よって増減表は次のようになる。

$x$		-1		$\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$		$\frac{11}{7}$		$\frac{11+6\sqrt{2}}{7}$		5	
$y'$	+	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$y''$	-	0	+	0	-	-	-	0	+	0	+
$y$	↗		↗		↗		↘		↘		↗

$x$  軸との交点は  $y = 0$  を解いて  $x = -1, 5$  である。 $y$  軸との交点は  $y$  に  $x = 0$  を代入して  $(-5)^4 = 5^4$  である。以上を考慮してグラフの概形を描くと次のようになっている。





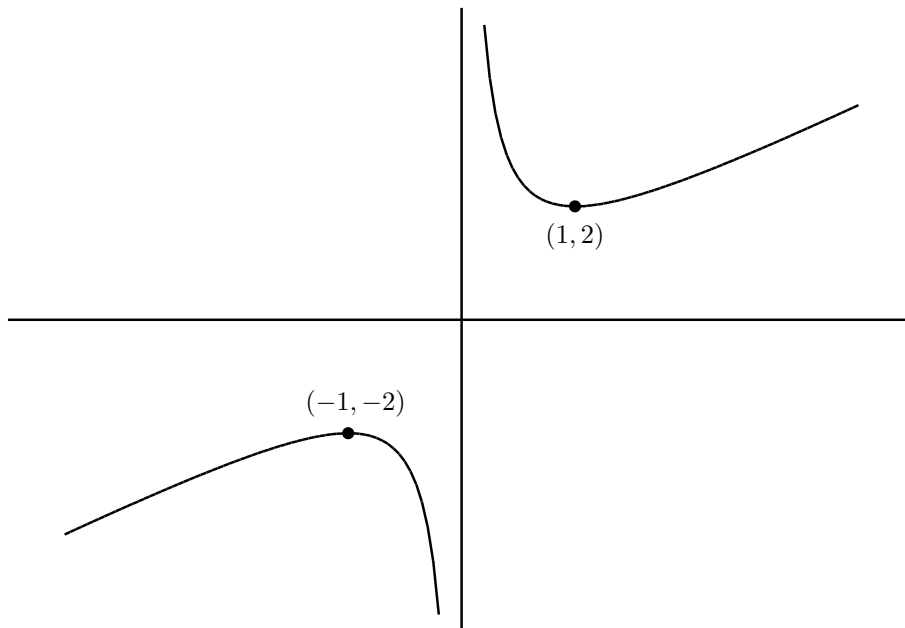
(11)  $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$  なので  $y' = 0$  を解いて  $x = -1, 1$  を得る。  $y'' = \frac{2}{x^3}$  なので増減表は次の様になる。

$x$		-1		0		1	
$y'$	+	0	-	×	-	0	+
$y''$	-	-	-	×	+	+	+
$y$	↗		↘	×	↘		↗

グラフは  $x$  軸とも  $y$  軸とも交わらない。

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



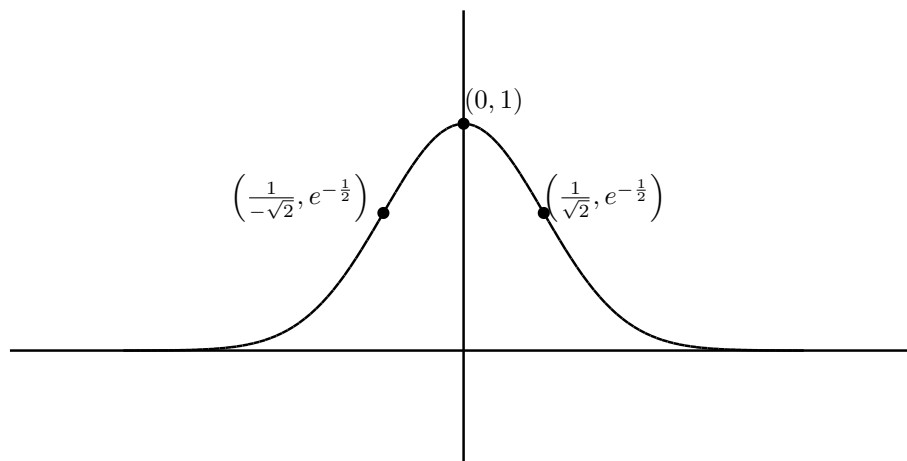
(12)  $y' = -2xe^{-x^2}$  なので  $y' = 0$  を解いて  $x = 0$  を得る。 $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$  なので  $y'' = 0$  を解いて  $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$  を得る。よって増減表は次のようになる。

$x$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$y'$	+	+	+	0	-	-	-
$y''$	+	0	-	-	-	0	+
$y$	↗		↖		↘		↙

グラフは  $x$  軸とは交わらない。 $y$  軸との交点は  $y = 1$  である。また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



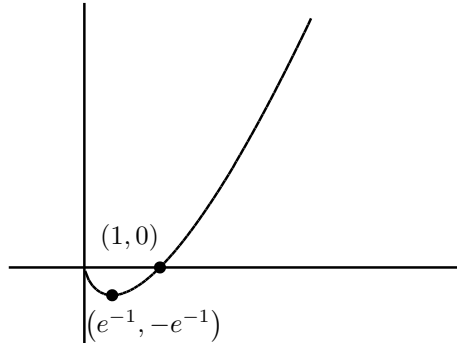
(13)  $y' = \log x + 1$  なので  $y' = 0$  を解いて  $x = \frac{1}{e}$  を得る。 $y'' = \frac{1}{x}$  なので  $y'' = 0$  となる  $x$  は存在しない。よって増減表は次のようになる。

$x$	0		$\frac{1}{e}$	
$y'$	×	-	0	+
$y''$	×	+	+	+
$y$		↘		↗

$x$  軸との交点は  $x = 1$  であり、 $y$  軸とは交わらない。また  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$  である。この後学んだロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x \log x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +0} x = 0 \end{aligned}$$

が分かる。以上からグラフの概形は次のようになっている。



演習問題 1.26 次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

(1)  $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$

(2)  $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$

(3)  $x = x(t) = t^2 - t^3, y = y(t) = 2t^4 - t$

(1)  $x'(t) = 4t^3 - 2t$  なので  $x'(t) = 0$  を解いて  $t = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  を得る。  $y'(t) = 3t^2 - 1$  なので

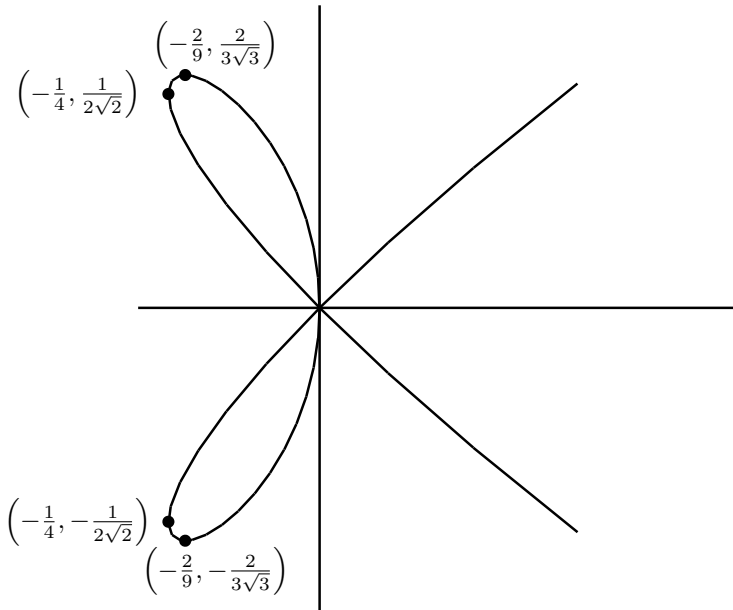
$y'(t) = 0$  を解いて  $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  を得る。  $x'(t), y'(t)$  の正負を調べるために、途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

$t$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$x'$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$x$	←		→	→	→		←	←	←		→
$y'$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$y$	↑	↑	↑		↓	↓	↓		↑	↑	↑
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖	↑	↗

$x'(t) = 0$  および  $y'(t) = 0$  となる点は  $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right),$   
 $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right), (x(0), y(0)) = (0, 0), \left(x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) =$   
 $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$  である。

$x(t) = 0$  を解くと  $t = 0, \pm 1$  を得る。  $(x(0), y(0)) = (0, 0), (x(1), y(1)) = (0, 0), (x(-1), y(-1)) = (0, 0)$  なので  $y$  軸との交点は  $(0, 0)$  である。

$y(t) = 0$  を解くと  $t = 0, \pm 1$  を得る。  $x$  軸との交点は  $(0, 0)$  である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



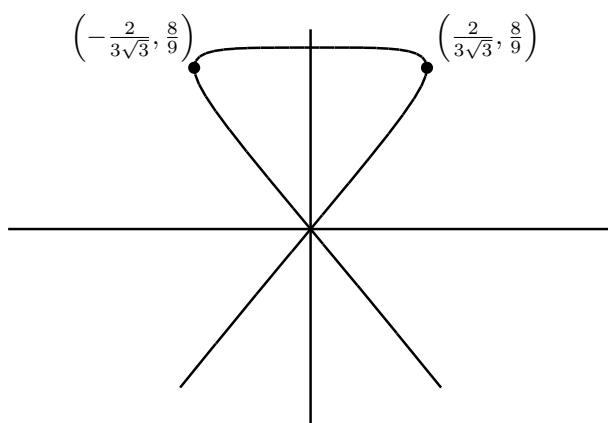
(2)  $x'(t) = 1 - 3t^2$  なので  $x'(t) = 0$  を解いて  $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  を得る。 $y'(t) = -4t^3$  なので  $y'(t) = 0$  を解いて  $t = 0$  を得る。 $x'(t), y'(t)$  の正負を調べるために、途中の値を代入して調べると増減表は以下のようになる。

$t$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$x'$	-	0	+	+	+	0	-
$x$	←		→	→	→		←
$y'$	+	+	+	0	-	-	-
$y$	↑	↑	↑		↓	↓	↓
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙

$x'(t) = 0$  および  $y'(t) = 0$  となる点は  $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{8}{9}\right)$ ,  $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ ,  $\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{8}{9}\right)$  である。

$x(t) = 0$  を解くと  $t = 0, \pm 1$  を得る。 $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ ,  $(x(1), y(1)) = (0, 0)$ ,  $(x(-1), y(-1)) = (0, 0)$  なので  $y$  軸との交点は  $(0, 0), (0, 1)$  である。

$y(t) = 0$  を解くと  $t = \pm 1$  を得る。 $x$  軸との交点は  $(0, 0)$  である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次のようになる。



(3)  $x'(t) = 2t - 3t^2, y'(t) = 8t^3 - 1$  なので  $x'(t) = 0$  を解くと,  $t(2 - 3t) = 0$  より  $t = 0, \frac{2}{3}$  を得る。 $y'(t) = 0$  を解くと,  $8t^3 - 1 = (2t - 1)(4t^2 + 2t + 1) = 0$  より  $t = \frac{1}{2}$  を得る。 $x'(t), y'(t)$  の正負を調べるために, 途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

$t$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
$x'$	-	0	+	+	+	0	-
$x$	←		→	→	→		←
$y'$	-	-	-	0	+	+	+
$y$	↓	↓	↓		↑	↑	↑
曲線	↙	↓	↘	→	↗	↑	↖

$x'(t) = 0$  および  $y'(t) = 0$  となる点は  $(0, 0), \left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right), \left(\frac{4}{27}, -\frac{22}{81}\right)$ , である。 $x(t) = 0$  を解くと  $t = 0, 1$  を得る。 $y$  軸との交点は  $(0, 0), (0, 1)$  である。 $y(t) = 0$  を解くと  $t = 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  を得る。 $x$  軸との交点は  $(0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{2}, 0\right)$  である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。

