解析学I問題解説 #6

河野

演習問題 ***2.1**　次の D に対し ∂D を求めよ。

(1) $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq 1 \right\}$

(2) $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x < 1, -2 < y < \sin \dfrac{1}{x} \right\}$

(3) $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1, x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \right\}$

D の内点全体の集合を I，外点全体の集合を X とする。$O=(0,0)$ を原点とする。

(1)　$\partial D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 = 1 \right\}$ であることを示す。そのために $I = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 < 1 \right\}$, $X = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 > 1 \right\}$ を示せばよい。

$J = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 < 1 \right\}$ とおき，$P=(x,y)$ を J の任意の点とする。このとき $x^2+y^2 < 1$ なので $\varepsilon = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと $\varepsilon > 0$ である。$U_\varepsilon(P) = \left\{ Q \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, d(Q,P) < \varepsilon \right\}$ とおく。$Q=(x',y')$ を $U_\varepsilon(P)$ の任意の点とする

$$x'^2 + y'^2 = d(Q,O) \leqq d(Q,P) + d(P,O) < \varepsilon + \sqrt{x^2+y^2} < 1$$

となるので $U_\varepsilon(P) \subseteq D$ が成立する。よって P は D の内点であり，$P \in I$ が成立する。

逆に $P=(x,y)$ を D の内点 (即ち $P \in I$) とすると，ある正の実数 ε が存在して $U_\varepsilon(P) \subseteq D$ となる。$P = O = (0,0)$ のときは $P \in J$ なので $d(P,O) = \sqrt{x^2+y^2} \neq 0$ とする。

このとき

$$Q = (x',y') = \left(x + \frac{\varepsilon x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, y + \frac{\varepsilon y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

とおくと $d(P,Q) = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ より $Q \in U_\varepsilon(P) \subseteq D$ である。

$$\begin{aligned}
d(Q,O) = \sqrt{x'^2+y'^2} &= \sqrt{\left(x + \frac{\varepsilon x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 + \left(y + \frac{\varepsilon y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2} \\
&= \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 + y^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2} \\
&= \sqrt{(x^2+y^2) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2} = \sqrt{x^2+y^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\
&= d(P,O) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)
\end{aligned}$$

$d(Q,O) \leqq 1$ より $d(P,O) < 1$ となり，$P \in J$ となる。よって $I = J$ が示された。

$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 > 1 \right\}$ とおく。$P=(x,y)$ を K の任意の点とする。$d(P,O) > 1$ なので $\varepsilon = d(P,O) - 1$ とおくと $\varepsilon > 0$ である。$U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$ であることを示せば，P は D の外点になり，$K \subseteq X$ が示される。$Q = (x',y')$ を $U_\varepsilon(P)$ の任意の点とする。$d(P,Q) < \varepsilon$ なので

$$1 + \varepsilon = d(P,O) \leqq d(P,Q) + d(Q,O) < \varepsilon + d(Q,O)$$

より $1 < d(Q,O)$ となる。よって $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$ である。

逆に P を D の外点とする。ある正の実数 ε が存在して $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$ となっている。

このとき

$$Q = (x', y') = \left(x - \frac{\varepsilon x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, y - \frac{\varepsilon y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

とおくと $d(P,Q) = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ より $Q \in U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$ である。

$$\begin{aligned}
d(Q,O) = \sqrt{x'^2 + y'^2} &= \sqrt{\left(x - \frac{\varepsilon x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 + \left(y - \frac{\varepsilon y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2} \\
&= \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 + y^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2} \\
&= \sqrt{(x^2+y^2) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2} = \sqrt{x^2+y^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\
&= d(P,O) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)
\end{aligned}$$

$d(Q,O) > 1$ より $d(P,O) > 1$ となり，$P \in K$ となる。よって $X = K$ が示された。

(2)　$L_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x < 1, y = \sin \dfrac{1}{x} \right\}, L_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = 1, -2 < y \leqq \sin 1 \right\}$,
$L_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x \leqq 1, y = -2 \right\}, L_4 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = 0, -2 \leqq y \leqq 1 \right\}$,
$E = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ とおくとき，$\partial D = E$ であることを示す。

最初に D の点は D の内点であることを示す。$P = (x_0, y_0) \in D$ とする。

$\varepsilon_1 = y_0 - (-2), \varepsilon_2 = x_0, \varepsilon_3 = 1 - x_0, \varepsilon_4 = \inf \left\{ d\left((x, \sin \dfrac{1}{x}), (x_0, y_0) \right) \,\middle|\, 0 < x \leqq 1 \right\}$ とおく。
n を $\dfrac{1}{\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi} < x_0$ を満たす自然数とすると

$$\varepsilon_4 = \inf \left\{ d\left((x, \sin \frac{1}{x}), (x_0, y_0) \right) \,\middle|\, \frac{1}{\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi} \leqq x \leqq 1 \right\}$$

が成立するが，最大値定理より

$$\varepsilon_4 = \min \left\{ d\left((x, \sin \frac{1}{x}), (x_0, y_0) \right) \,\middle|\, \frac{1}{\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi} \leqq x \leqq 1 \right\}$$

が成立するので $\varepsilon_4 > 0$ である。

$$\varepsilon = \min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \}$$

とおくと

$$U_\varepsilon(P) \subseteq D$$

が成立するので P は D の内点である。逆に P を D の内点とすると，ある正の実数 ε が存在して $U_\varepsilon(P) \subseteq D$ となるので $P \in D$ である。よって $I = D$ である。

$K=\mathbb{R}^2-D-E$ とおくとき，$X=K$ を示す。$P=(x_0,y_0)\in K$ とすると (1) $y_0<-2$，または (2) $x_0<0$，または (3) $x_0>1$，または (4) $0<x_0\leqq 1$ かつ $y_0>\sin\dfrac{1}{x_0}$，(5) $x_0=0$ かつ $y_0>1$ が成立している。

(1) のときは $\varepsilon=|y_0-(-2)|$ とおくと $U_\varepsilon(P)\cap D=\emptyset$ となっている。(2) のときは $\varepsilon=|x_0-0|$ とおくと $U_\varepsilon(P)\cap D=\emptyset$ となっている。(3) のときは $\varepsilon=|x_0-1|$ とおくと $U_\varepsilon(P)\cap D=\emptyset$ となっている。

(4) のときは $\varepsilon=\inf\left\{d\left((x,\sin\dfrac{1}{x}),(x_0,y_0)\right)\;\middle|\;0<x\leqq 1\right\}$ とおく。n を $\dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}<x_0$ を満たす自然数とすると

$$\varepsilon=\inf\left\{d\left((x,\sin\frac{1}{x}),(x_0,y_0)\right)\;\middle|\;\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\leqq x\leqq 1\right\}$$

が成立するが，最大値定理より

$$\varepsilon=\min\left\{d\left((x,\sin\frac{1}{x}),(x_0,y_0)\right)\;\middle|\;\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\leqq x\leqq 1\right\}$$

が成立するので $\varepsilon>0$ である。

$$U_\varepsilon(P)\cap D=\emptyset$$

が成立するので P は D の外点である。

(5) のときは $y_0-1=\varepsilon$ とおくと $U_\varepsilon(P)\cap D=\emptyset$ となるので外点である。

逆に D の外点は K に含まれることを示せば $X=K$ が分かる。D は D の内点なので外点ではない。よって L_1,L_2,L_3,L_4 が外点でないことを示せばよい。ε を任意の正の実数とする。

$P=(x_0,y_0)\in L_1$ とする $x=x_0, y=\max\left\{y_0-\dfrac{\varepsilon}{2},-\dfrac{3}{2}\right\}$ とおく。$Q=(x,y)$ とすると $Q=(x,y)\in D$ となる。

$$d\,(P,Q)\leqq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

なので $Q\in U_\varepsilon(P)$ となり，よって P は外点でない。

$P=(x_0,y_0)\in L_2$ とする。$y_0=\sin 1$ のときは $x=\max\left\{x_0-\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}\right\}, y=\max\left\{y_0-\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},-\dfrac{3}{2}\right\}$ とおく。$y_0\neq\sin 1$ のときは $x=\max\left\{x_0-\dfrac{\varepsilon}{2},\dfrac{1}{2}\right\}, y=y_0$ とおく。$Q=(x,y)\in D$ となる。

$$d\,(P,Q)=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

なので $Q\in U_\varepsilon(P)$ となり，よって P は外点でない。

$P=(x_0,y_0)\in L_3$ とする。$x_0=1$ のときは $x=\max\left\{x_0-\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}\right\}, y=\min\left\{y_0+\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},-\dfrac{3}{2}\right\}$ とおく。$x_0\neq 1$ のときは $x=x_0, y=\min\left\{y_0+\dfrac{\varepsilon}{2},-\dfrac{3}{2}\right\}$ とおく。$Q=(x,y)$ とすると $Q=(x,y)\in D$ となる。

$$d\,(P,Q)\leqq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

なので $Q\in U_\varepsilon(P)$ となり，よって P は外点でない。

$P=(x_0,y_0)\in L_4$ とする。$y_0=-2$ のときは $x=\max\left\{x_0+\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}\right\}, y=\min\left\{y_0+\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},-\dfrac{3}{2}\right\}$ とおく。$-2<y_0<-1$ のときは $x=\min\left\{x_0+\dfrac{\varepsilon}{2},\dfrac{1}{2}\right\}, y=y_0$ とおく。$y_0=-1$ のときは $x=\min\left\{x_0+\dfrac{\varepsilon}{2},\dfrac{1}{2}\right\}, y=\min\left\{y_0-\dfrac{\varepsilon}{2},-\dfrac{3}{2}\right\}$ とおく。$-1<y_0<1$ のとき次のような数列 $\{\alpha_n\}$ が存在する；$\{\alpha_n\}$ は (1) 0 に収束する単調減少数列であり，(2) $(\alpha_n,y_0)\in D$ を満たす。このことを示すのは最後にまわして，これを使って議論を進める。α_n は 0 に収束するので，$0<\alpha_n<\varepsilon$ となる n が存在する。このとき $x=\alpha_n, y=y_0$ とおく。$y_0=1$ のとき $y_1=\max\left\{y_0-\dfrac{\varepsilon}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$ とすると，$-1<y_1<1$ なので y_1 に対し $\{\alpha_n\}$ と同じ性質をもつ数列 $\{\beta_n\}$ が存在する。この β_n に対し $0<\beta_n<\dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たす自然数 n が存在する。このとき $x=\beta_n, y=y_1$ とする。$Q=(x,y)$ とすると $Q=(x,y)\in D$ となる。

$$d(P,Q)\leqq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

なので $Q\in U_\varepsilon(P)$ となり，よって P は外点でない。

以上により $\partial D=E$ である。

残っている (1) 0 に収束する単調減少数列であり，(2) $(\alpha_n,y_0)\in D$ を満たす数列 $\{\alpha_n\}$ の存在を示す。

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ \sin\frac{1}{x}=y_0, 0<x<1\right\}$$

とする。$\dfrac{1}{x}=X$ とおくと $A=\left\{\dfrac{1}{X}\in\mathbb{R}\ \middle|\ \sin X=y_0, X>0\right\}$ と表されるので A は空集合ではない。$\sin\dfrac{1}{x}=y_0$ のとき

$$\sin\frac{1}{x}=\sin\left(\frac{1}{x}+2n\pi\right)=\sin\left(\frac{1+2n\pi x}{x}\right)=\sin\left(\frac{1}{\dfrac{1+2n\pi x}{x}}\right)$$

となるので $x\in A$ ならば $\dfrac{1}{\dfrac{1+2n\pi x}{x}}\in A$ である。言い換えると A の中にはいくらでも 0 に近い元が存在する。よって A の元すべてを大きい順に

$$\beta_1>\beta_2>\beta_3>\cdots$$

と番号付ける。

$$K_n=\{(x,y_0)\mid\beta_{n+1}<x<\beta_n\}$$

とおくと，任意の自然数 n に対し $K_{2n-1}\subseteq D$ が成立するが，または任意の自然数 n に対し $K_{2n}\subseteq D$ が成立する。前者の場合は $\beta_{2n}<\alpha_n<\beta_{2n-1}$，後者の場合は $\beta_{2n+1}<\alpha_n<\beta_{2n}$ を満たすように α_n を決めると求めるものが得られる。

(3)　$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ 0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 1\right\}$ とおくとき $\partial D=E$ を示す。「普通」の集合 D の場合 ∂D は 1 次元的であるが，この例では ∂D が 2 次元的になっている。E の任意の点 P が境界点であることを示す。そのために任意の正の実数 ε に対し $U_\varepsilon(P)$ は D に含まれる点も D に含まれない点も含むことを示す。

実数に対しいくらでも近くに有理数が存在する。きちんと書くと

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists q \in \mathbb{Q} \qquad |x - q| < \varepsilon$$

が成立する。これを用いると

$$\forall P = (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \forall \varepsilon > 0\ \exists Q = (x', y') \in \mathbb{Q}^2 \qquad d(P, Q) < \varepsilon$$

の成立が分かる。

また実数に対しいくらでも近くに無理数が存在する。きちんと書くと

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists q \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \qquad |x - q| < \varepsilon$$

が成立する。これを用いると

$$\forall P = (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \forall \varepsilon > 0\ \exists Q = (x', y') \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \qquad d(P, Q) < \varepsilon$$

の成立が分かる。この 2 つを用いると $P = (x, y) \in E$ と任意の正の実数 ε に対し

$$\exists Q = (x', y') \in D \qquad d(P, Q) < \varepsilon, \qquad \exists R = (x'', y'') \notin D \qquad d(P, R) < \varepsilon$$

が示される。

演習問題 ****2.2**　定理 2.4 を証明せよ。

$P = (x, y), P_0 = (a, b)$ とする。$\lim_{P \to P_0} f(P) = A$ の定義は

$$\forall \varepsilon (> 0) \in \mathbb{R}\ \exists \delta (> 0) \in \mathbb{R}\ \forall P\ \ 0 < d(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - A| < \varepsilon$$

が成立することである。ここで $d(P, P_0) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ である。

$\lim_{P \to P_0} f(P) = A, \lim_{P \to P_0} f(P) = B$ とする。

(1)　1) $\varepsilon > 0$ を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して，任意の P に対し

$$0 < d(P, P_0) < \delta_1 \implies |f(P) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して，任意の P に対し

$$0 < d(P, P_0) < \delta_2 \implies |g(P) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。このとき $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおく。$0 < d(P, P_0) < \delta$ のとき

$$\begin{aligned} |f(P) + g(P) - (A + B)| &= |(f(P) - A) + (g(P) - B)| \\ &\leqq |f(P) - A| + |g(P) - B| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となる。

2) $k=0$ の場合は $kf(P)$ は恒等的に 0 なので成立している。よって $k\neq 0$ とする。任意の正数 ε に対して上の様な δ が存在するので，特に $\dfrac{\varepsilon}{|k|}$ に対し $\delta>0$ が存在して $0<d(P,P_0)<\delta$ ならば $|f(P)-A|<\dfrac{\varepsilon}{|k|}$ を満たす。このとき

$$|kf(P)-kA|=|k(f(P)-A)|=|k|\cdot|f(P)-A|<|k|\frac{\varepsilon}{|k|}=\varepsilon$$

となるので証明された。
3) 1 に対しある正数 δ_0 が存在し，任意の P に対し

$$0<d(P,P_0)<\delta_0 \implies |f(P)-A|<1$$

が成立している。このとき $M=\max\{\,|A+1|,|A-1|\,\}$ とおくと $0<d(P,P_0)<\delta_0$ のとき $|f(P)|\leqq M$ が成立する。

最初に $B=0$ の場合を考える。ε を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して任意の P に対し $0<d(P,P_0)<\delta_1 \implies |g(P)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$ が成立する。$\delta=\min\{\,\delta_0,\delta_1\,\}$ とおくと，任意の P に対し $0<d(P,P_0)<\delta$ のとき

$$\begin{aligned}|f(P)g(P)-AB|&=|f(P)g(P)|=|f(P)|\cdot|g(P)|\\&<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon\end{aligned}$$

が成立する。この場合は証明された。

よって $B\neq 0$ とする。ε を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して任意の P に対し

$$0<d(P,P_0)<\delta_1 \implies |f(P)-A|<\frac{\varepsilon}{2|B|}$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して任意の P に対し

$$0<d(P,P_0)<\delta_2 \implies |g(P)-B|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

が成立する。$\delta=\min\{\,\delta_0,\delta_1,\delta_1\,\}$ とおく。$0<d(P,P_0)<\delta$ となる P に対し

$$\begin{aligned}|f(P)g(P)-AB|&=|f(P)g(P)-f(P)B+f(P)B-AB|\\&\leqq|f(P)g(P)-f(P)B|+|f(P)B-AB|\\&=|f(P)|\cdot|g(P)-B|+|f(P)-A|\cdot|B|\\&<M\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2|B|}|B|=\varepsilon\end{aligned}$$

となり，この場合も成立する。
4) $B\neq 0$ のとき

$$\lim_{P\to P_0}\frac{1}{g(P)}=\frac{1}{B}$$

を示せば，3) と組み合わせて 4) が証明される。

ε として $\dfrac{|B|}{2}$ をとると，正数 δ_1 が存在して，$0<d(P,P_0)<\delta_1$ のとき，

$$|g(P)-B|<\frac{|B|}{2}$$

が成立する。このとき $|g(P)| > \dfrac{|B|}{2}$ が成立する。

任意の ε に対して，$g(P)$ は B に収束するので，ある正数 δ_2 が存在して，$0 < d(P, P_0) < \delta_2$ となる任意の P に対し

$$|g(P) - B| < \frac{|B|^2}{2}\varepsilon$$

が成立する。このとき $\delta = \min\{\,\delta_1, \delta_2\,\}$ とおくと $0 < d(P, P_0) < \delta$ となる任意の P に対し

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{g(P)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - g(P)}{g(P)B}\right| &= \frac{|B - g(P)|}{|g(P)| \cdot |B|} \\ &< \frac{2|B - g(P)|}{|B|^2} < \varepsilon\end{aligned}$$

が成立する。

(2)　結論が成立しないと仮定すると，$A > B$ が成立している。$\varepsilon = \dfrac{A - B}{2}$ とおくと $\varepsilon > 0$ なので $\delta_1 > 0$ が存在して

$$0 < d(P, P_0) < \delta_1 \implies |f(P) - A| < \varepsilon$$

が成立する。結論の式は

$$\begin{aligned}|f(P) - A| < \varepsilon &\implies -\varepsilon < f(P) - A < \varepsilon \\ &\implies A - \varepsilon < f(P) < A + \varepsilon \\ &\implies A - \frac{A - B}{2} < f(P) < A + \frac{A - B}{2} \\ &\implies \frac{A + B}{2} < f(P) < A + \frac{A - B}{2}\end{aligned}$$

と変形できる。このとき $\dfrac{A + B}{2} < f(P)$ が成立している。

また $\delta_2 > 0$ が存在して

$$0 < d(P, P_0) < \delta_2 \implies |g(P) - B| < \varepsilon$$

が成立する。結論の式は

$$\begin{aligned}|g(P) - B| < \varepsilon &\implies -\varepsilon < g(P) - B < \varepsilon \\ &\implies B - \varepsilon < g(P) < B + \varepsilon \\ &\implies B - \frac{A - B}{2} < g(P) < B + \frac{A - B}{2} \\ &\implies B - \frac{A - B}{2} < g(P) < \frac{A + B}{2}\end{aligned}$$

と変形できる。このとき $g(P) < \dfrac{A + B}{2}$ が成立している。$\delta = \min\{\,\delta_1, \delta_2\,\}$ とおくと $0 < d(P, P_0) < \delta$ となる P に対し

$$g(P) < \frac{a + B}{2} < f(P)$$

が成立する。これは矛盾，よって結論が正しいことが示される。
(3)　任意の正数 ε に対し，ある δ_1 が存在して

$$0 < d(P, P_0) < \delta_1 \implies |f(P) - A| < \varepsilon$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して

$$0 < d(P, P_0) < \delta_2 \implies |h(P) - A| < \varepsilon$$

が成立する。$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと P が $0 < d(P, P_0) < \delta$ を満たすとき

$$A - \varepsilon < f(P) \leqq g(P) \leqq h(P) < A + \varepsilon$$

が成立するので $|g(P) - A| < \varepsilon$ が成立する。よって $\displaystyle\lim_{P \to P_0} g(P) = A$ である。

演習問題 2.3　次の極限値が存在するかどうかを調べ，存在するときは極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2 + 2}{x + y - 1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^3 + (y-1)^3}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$　　(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}$

(1)　分母の極限は 0 ではないので

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2 + 2}{x + y - 1} = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 + y^2 + 2\right)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x + y - 1)} = \frac{2}{-1} = -2$$

(2)　$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと $(x, y) \to (0, 0)$ と $r \to 0$ は同じである。ただし θ は任意に変化可能である。

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r^3\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)}{r^2} = r\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)$$

となる。$|\cos\theta| \leqq 1, |\sin\theta| \leqq 1$ より

$$\left|\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right| \leqq r\left|\cos^3\theta + \sin^3\theta\right| \leqq r\left(\left|\cos^3\theta\right| + \left|\sin^3\theta\right|\right) \leqq 2r$$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$ である。
(3)　$x = 1 + r\cos\theta, y = 1 + r\sin\theta$ とおくと $(x, y) \to (1, 1)$ と $r \to 0$ は同じである。

$$\frac{(x-1)^3 + (y-1)^3}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$$

となるので (2) と同様に

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^3 + (y-1)^3}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$$

となる。
(4)　$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおく。

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}=\frac{r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\cos\theta\sin\theta+r^2\sin^2\theta}=\frac{r\cos^3\theta+r\sin^3\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta}$$

分子は (2) と同様に

$$|r\cos^3\theta+r\sin^3\theta|\leqq 2r$$

となる。分母は

$$\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=1+\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

とできるので $-1\leqq\sin 2\theta\leqq 1$ より

$$\frac{1}{2}\leqq\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta\leqq\frac{3}{2}$$

これより

$$0<\frac{1}{\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta}\leqq 2$$

が成立する。よって

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\right|\leqq 4r$$

となるので極限値は 0 である。
(5)　$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおく。

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\cos\theta\sin\theta+r^2\sin^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta}$$

$\theta=0$ として $r\to 0$ とすると極限値は 0 であり，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ として $r\to 0$ とすると極限値は $\dfrac{2}{3}$ である。よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$ は存在しない。

演習問題 ***2.4**　　定理 2.8 を証明せよ。

D を有界閉領域とし，$f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ を連続な関数とする。1 変数の証明と同様に最初に f が有界であることを示す。そのために f が有界でないと仮定する。任意の自然数 n に対し D の点 $P_n=(x_n,y_n)$ で $f(P_n)>n$ となる点が存在する。$A=\{\,P_n\mid n\in\mathbb{N}\,\}$ と置く。収束する部分数列を以下の様に選ぶ。ここで長方形領域に対し次の記法を定義する。

$$R(a,b,c,d)=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,a\leqq x\leqq b, c\leqq y\leqq d\,\right\}$$

D は有界なのである長方形領域 $R(a,b,c,d)$ で $D\subseteq R(a,b,c,d)$ となるものが存在する。$a_1=a, b_1=b, c_1=c, d_1=d, \alpha(1)=1$ とする。$e_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}, f_1=\dfrac{c_1+d_1}{2}$ と置き，$R(a,b,c,d)$ を 4 つの長方形領域

$$R(a_1,e_1,c_1,f_1),\quad R(a_1,e_1,f_1,d_1),\quad R(e_1,b_1,c_1,f_1),\quad R(e_1,b_1,f_1,d_1)$$

に分けると，4 つのどれかは A の点を無限個含んでいる。無限個含んでいるものを選び，その頂点を a_2, b_2, c_2, d_2 とする。例えば $R(a_1, e_1, c_1, f_1)$ が選ばれたときは $a_2 = a_1, b_2 = e_1, c_2 = c_1, d_2 = f_1$ とする。また $R(a_2, b_2, c_2, d_2)$ に含まれる D の点で $n > \alpha(1)$ となるものが存在するので，その点を $P_{\alpha(2)}$ とする。この操作を続けることにより点列 $\{ P_{\alpha(n)} \}$ が定まる。a_n, c_n は上に有界な単調増加数列であり，b_n, d_n は下に有界な単調減少数列である。

$$a_n \leqq x_{\alpha(n)} \leqq b_n, \qquad c_n \leqq y_{\alpha(n)} \leqq d_n$$

であり，

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a), \qquad d_n - c_n = \frac{1}{2^{n-1}}(d-c)$$

なので $x_{\alpha(n)}, y_{\alpha(n)}$ は収束する。よって $P_0 = \lim_{n\to\infty} P_{\alpha(n)}$ とおくと，D が閉集合ということから $P_0 \in D$ が分かる。どうしてかというと，$\forall\varepsilon > 0$ に対し $d(P_{\alpha(n)}, P_0) < \varepsilon$ となる点 $P_{\alpha(n)}$ が存在するので，P_0 は D の外点ではない。よって P_0 は D の内点か境界点である。内点ならば $P_0 \in D$ であるし，境界点ならば，閉集合ということから $\partial D \subseteq D$ となるので，やはり $P_0 \in D$ である。f は連続なので

$$\lim_{n\to\infty} f(P_{\alpha(n)}) = f(\lim_{n\to\infty} P_{\alpha(n)}) = f(P_0)$$

となるが，$f(P_{\alpha(n)}) > \alpha(n) \geqq n$ なので $\lim_{n\to\infty} f(P_{\alpha(n)}) = \infty$ となる。これは矛盾なので，最初の「有界でない」という仮定が正しくない。よって有界が証明された。

$X = \{ f(P) \mid P \in D \}$ とおくと X は有界なので上限 $M = \sup X$ が存在する。$f(P) = M$ となる点 P が存在すれば P は最大値を与えるので，$f(P) = M$ となる点 P が存在しないとする。このとき $g(P) = \dfrac{1}{M - f(P)}$ は D で定義される連続関数であるが上に有界でない。これは示したことに矛盾するので，$f(P) = M$ となる点 P は存在する。これが最大値を与える。

演習問題 2.5　上の関数が原点において連続でない事を示せ。また原点における偏導関数を求め，原点において偏微分可能であることを確認せよ。

$z = f(x, y)$ が原点において連続であるとは $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$ が成立することである。原点で連続でないことを示すには，この極限が存在しないか，存在しても $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$ でないことを示せばよい。

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおいて極座標で考える。$(x, y) \to (0, 0)$ と $r \to 0$ は同値である。$f(x, y) = \dfrac{r\cos\theta r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \dfrac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$ となるので極限値は θ に依存する。たとえば $\theta = 0$ のときは 0 であるが $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のときは $\dfrac{1}{2}$ である。2 変数の極限の定義よりこれは収束しない。よって $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続ではない。偏導関数は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h0}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{0k}{0^2+k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0
\end{aligned}$$

である。

演習問題 *2.6　定理 2.11 を証明せよ。

f_x が連続であるとする。

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)+f(a,b+k)-f(a,b)$$

と変形して 1 変数の結果を使う。$\varepsilon_1(h,k)=\dfrac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)}{h}-f_x(a,b+k)$ とおくと $\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h,k)=0$ であり，$\varepsilon_1(k)=\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}-f_y(a,b)$ とおくと $\displaystyle\lim_{k\to 0}\varepsilon_1(k)=0$ である。また f_x は連続なので $\delta(k)=f_x(a,b+k)-f_x(a,b)$ とおくと $\displaystyle\lim_{k\to 0}\delta(k)=0$ である。このとき

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h,k)&=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&=\frac{f_x(a,b+k)h+\varepsilon_1(h,k)h+f_y(a,b)k+\varepsilon_1(k)k-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&=\frac{f_x(a,b)h+\delta(k)h+\varepsilon_1(h,k)h+\varepsilon_1(k)k-f_x(a,b)h}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&=\frac{\delta(k)h+\varepsilon_1(h,k)h+\varepsilon_1(k)k}{\sqrt{h^2+k^2}}
\end{aligned}$$

が成立する。

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leqq 1,\qquad \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leqq 1$$

が成立するので

$$\begin{aligned}
|\varepsilon(h,k)|&\leqq\left|\frac{\delta(k)h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|+\left|\frac{\varepsilon_1(h,k)h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|+\left|\frac{\varepsilon_1(k)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\\
&\leqq|\delta(k)|\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|+|\varepsilon_1(h,k)|\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|+|\varepsilon_1(k)|\left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\\
&\leqq|\delta(k)|+|\varepsilon_1(h,k)|+|\varepsilon(k)|
\end{aligned}$$

となり $\varepsilon(h,k)\to 0$ が示される。

演習問題 2.7　演習問題 2.5 の関数は原点で全微分可能でない事を示せ。

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能でことの定義は

$$\varepsilon(h,k)\quad=\quad\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成立することである。

$(x,y)=(0,0)$ のとき

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k) &= \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \frac{\dfrac{hk}{h^2+k^2}-0-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}\end{aligned}$$

となる。$h=r\cos\theta, k=r\sin\theta$ とおくと

$$\varepsilon(h,k) = \frac{r\cos\theta r\sin\theta}{\left((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\right)\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}$$

となる。$(h,k)\to(0,0)$ と $r\to 0$ は同値なので $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=\lim_{r\to 0}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}$ となる。これは収束しないので f は $(0,0)$ において全微分可能ではない。

全微分可能な関数は連続であるので，そのことを使ってた別解もある。まずある点で全微分可能な関数はその点で連続であることを示す。$z=f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能のとき

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成立している。この式は

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

となる。このとき

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}f(a+h,b+k)=f(a,b)$$

となるので (a,b) で連続である。

よって問題の関数が $(0,0)$ で全微分可能であるとすると $(0,0)$ で連続である。しかし演習問題 2.5 よりこの関数は $(0,0)$ で連続ではない。よって全微分可能ではない。