解析学 I 問題解説 #8

河野

演習問題 *2.22　定理 2.23 を証明せよ。

(a,b) の近傍を $U = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \right\}$ とする。これから考える点はすべてこの近傍に含まれているとする。

$$\Delta = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) - f(a,b) \tag{1}$$

とおく。$F(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$ とおくと $\Delta = F(a+h) - F(a)$ となっている。また $F'(x) = f_x(x,b+k) - f_x(x,b)$ が成立する。平均値の定理を $F(x)$ に適用すると

$$F(a+h) - F(a) = hF'(a+\theta h) \qquad (0 < \theta < 1)$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} \Delta &= F(a+h) - F(a) = hF'(a+\theta h) \\ &= h\left(f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b)\right) \end{aligned}$$

さらに平均値の定理を適用すると

$$= hkf_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k)$$

となる。f_{xy} は連続なので

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta}{hk} = f_{xy}(a,b) \tag{2}$$

が成立する。

また

$$\frac{\Delta}{hk} = \frac{1}{h}\left(\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k} - \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\right)$$

よって $\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{\Delta}{hk} = \frac{f_y(a+h,b)-f_y(a,b)}{h}$ となる。$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\Delta}{hk} = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{\Delta}{hk}$ なので $\displaystyle\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{\Delta}{hk}$ は収束し

$$\begin{aligned} f_{yx}(a,b) &= \lim_{h\to 0}\frac{f_y(a+h,b)-f_y(a,b)}{h} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\Delta}{hk} \\ &= f_{xy}(a,b) \end{aligned}$$

となる。

演習問題 2.23　定理 2.23 を仮定して次を示せ。

(1) $z=f(x,y)$ が C^3 級ならば

$$z_{xxy}=z_{xyx}=z_{yxx},\quad z_{yyx}=z_{yxy}=z_{xyy}$$

が成立する。

(2) * $z=f(x,y)$ が C^n 級ならば

$$z_{\cdots xy\cdots}=z_{\cdots yx\cdots}$$

が成立する。ただし $\cdots$ 部分は同じとし，微分は全部で n 回されるものとする。

(3) * $z=f(x,y)$ が C^n 級ならば n 階の導関数は x,y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

(1)　z が C^3 級のとき，z_x および z_y は C^2 級である。z_x に系を適用すると

$$z_{xxy}=\left(z_x\right)_{xy}=\left(z_x\right)_{yx}=z_{xyx}$$

が得られる。z_y に系を適用すると

$$z_{yxy}=\left(z_y\right)_{xy}=\left(z_y\right)_{yx}=z_{yyx}$$

z は C^3 級であるから，C^2 級でもある。よって系より $z_{xy}=z_{yx}$ が成立する。よって

$$z_{xyx}=\left(z_{xy}\right)_x=\left(z_{yx}\right)_x=z_{yxx}$$
$$z_{xyy}=\left(z_{xy}\right)_y=\left(z_{yx}\right)_y=z_{yxy}$$

となる。

(2)　* α，β を x と y からなる列とする。ただし α は k 個の x,y から，β は $n-k-2$ 個の x,y からできているとする。ただし $k\leqq n-2$ とする。ここで証明すべことは

$$z_{\alpha xy\beta}=z_{\alpha yx\beta}$$

である。

z_α は z を k 回微分したものなので C^{n-k} 級である。$n-k\geqq 2$ なので系が適用できる。このとき

$$\left(z_\alpha\right)_{xy}=\left(z_\alpha\right)_{yx}$$

が成立する。よって

$$z_{\alpha xy}=\left(z_\alpha\right)_{xy}=\left(z_\alpha\right)_{yx}=z_{\alpha yx}$$

が成立する。これより

$$z_{\alpha xy\beta}=\left(z_{\alpha xy}\right)_\beta=\left(z_{\alpha yx}\right)_\beta=z_{\alpha yx\beta}$$

の成立が示される。

(3)　* γ を x と y からなる列で，x が k 個，y が $n-k$ 個からなるとする。ω を

$$\omega=\underbrace{x\cdots x}_{k\text{ 個}}\underbrace{y\cdots y}_{n-k\text{ 個}}$$

となる列とするとき

$$z_\gamma = z_\omega$$

を示せばよい。γ が $\cdots yx \cdots$ という部分列を含まなければ，$\gamma = \omega$ なので $z_\gamma = z_\omega$ が成立する。γ が $\cdots yx \cdots$ という部分列を含んだとする。$\gamma = \alpha yx\beta$ と表記したとき $\gamma_1 = \alpha xy\beta$ とおく。このとき (2) の結果より $z_\gamma = z_{\gamma_1}$ が成立している。γ_1 が $\cdots yx \cdots$ という部分列を含まなければ $\gamma_1 = \omega$ となっているて，$z_\gamma = z_{\gamma_1} = z_\omega$ となり，命題は示される。γ_1 が $\cdots yx \cdots$ という部分列を含んだとする。$\gamma_1 = \alpha_1 yx\beta_1$ と表記したとき $\gamma_2 = \alpha_1 xy\beta_1$ とおく。このとき (2) の結果より $z_{\gamma_1} = z_{\gamma_2}$ が成立している。γ_2 が $\cdots yx \cdots$ という部分列を含まなければ，$\gamma_2 = \omega$ なので $z_\gamma = z_{\gamma_1} = z_{\gamma_2} = z_\omega$ が成立する。このことを続けていくことによりいつかは ω になる。即ち列 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ が存在して $\gamma_t = \omega$ となることが分かる。(2) より任意の k に対し $z_{\gamma_k} = z_{\gamma_{k+1}}$ が成立するので

$$z_\gamma = z_{\gamma_1} = \cdots = z_{\gamma_t} = z_\omega$$

が成立する。

演習問題 2.24　定理 2.26 を証明せよ。

$F(t) = f(a+ht, b+kt)$ とおく。

$$\begin{aligned} F'(t) &= h\frac{\partial}{\partial x}f(a+ht,b+kt) + k\frac{\partial}{\partial y}f(a+ht,b+kt) \\ &= Df(a+ht,b+kt) \end{aligned}$$

となる。更に t で微分すると

$$\begin{aligned} F''(t) &= h\frac{\partial}{\partial x}Df(a+ht,b+kt) + k\frac{\partial}{\partial y}Df(a+ht,b+kt) \\ &= D^2 f(a+ht,b+kt) \end{aligned}$$

となる。任意の自然数 n に対し

$$F^{(n)}(t) = D^n f(a+ht,b+kt)$$

となる (厳密には数学的帰納法で証明する)。1 変数のテーラーの定理より

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!}$$

を満たす θ ($0 < \theta < 1$) が存在する。これを整理すると定理が得られる。

演習問題 2.25　$n = 4$ のとき定理 2.26 を D を用いないで記述せよ。また $n = 5$ のときも記述せよ。

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) =& f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + h^2 f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b) \\ &+ h^3 f_{xxx}(a,b) + 3h^2 k f_{xxy}(a,b) + 3hk^2 f_{xyy}(a,b) + k^3 f_{yyy}(a,b) \\ &+ h^4 f_{xxxx}(a+\theta h, b+\theta k) + 4h^3 k f_{xxxy}(a+\theta h, b+\theta k) + 6h^2k^2 f_{xxyy}(a+\theta h, b+\theta k) \\ &+ 4hk^3 f_{xyyy}(a+\theta h, b+\theta k) + k^4 f_{yyyy}(a+\theta h, b+\theta k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(a+h,b+k) =& f(a,b)+hf_x(a,b)+kf_y(a,b)+h^2f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2f_{yy}(a,b)\\
&+h^3f_{xxx}(a,b)+3h^2kf_{xxy}(a,b)+3hk^2f_{xyy}(a,b)+k^3f_{yyy}(a,b)\\
&+h^4f_{xxxx}(a,b)+4h^3kf_{xxxy}(a,b)+6h^2k^2f_{xxyy}(a,b)+4hk^3f_{xyyy}(a,b)+k^4f_{yyyy}(a,b)\\
&+h^5f_{xxxxx}(a+\theta h,b+\theta k)+5h^4kf_{xxxxy}(a+\theta h,b+\theta k)+10h^3k^2f_{xxxyy}(a+\theta h,b+\theta k)\\
&+10h^2k^3f_{xxyyy}(a+\theta h,b+\theta k)+5hk^4f_{xyyyy}(a+\theta h,b+\theta k)+k^5f_{yyyyy}(a+\theta h,b+\theta k)
\end{aligned}
$$

演習問題 2.26　次の関数を (a,b) において最もよく近似する 1 次式，2 次式および 3 次式求めよ。ただし演習問題 2.27 の結果は用いてもよい。

(1) $z=f(x,y)=(x-1)(y+2)\quad (a,b)=(0,0)$

(2) $z=f(x,y)=\dfrac{1}{1-2x+3y}\quad (a,b)=(0,0)$

(3) $z=f(x,y)=\sin(x+y)\quad (a,b)=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

(1)　$f_x=y+2, f_y=x-1, f_{xx}=0, f_{yy}=0, f_{xy}=1, f_{xxx}=0, f_{xxy}=0, f_{xyy}=0, f_{yyy}=0$ なので $f(0,0)=-2, f_x(0,0)=2, f_y(0,0)=-1, f_{xx}(0,0)=0, f_{xy}(0,0)=1, f_{yy}=0, f_{xxx}(0,0)=0, f_{xxy}(0,0)=0, f_{xyy}(0,0)=0, f_{yyy}(0,0)=0$ となる。$f(x,y)$ を $(0,0)$ で最もよく近似する 1 次式は

$$f(0+h,0+k)\sim -2+2h-k$$

であり，最もよく近似する 2 次式は

$$f(0+h,0+k)\sim -2+2h-k+hk=f(h,k)$$

であり，最もよく近似する 3 次式は

$$f(0+h,0+k)\sim -2+2h-k+hk=f(h,k)$$

となる。この場合 $f(x,y)$ は 2 次式なので，近似の式は 2 次の段階で $f(x,y)$ に一致している。

(2)　$f_x=\dfrac{2}{(1-2x+3y)^2}, f_y=-\dfrac{3}{(1-2x+3y)^2}, f_{xx}=\dfrac{8}{(1-2x+3y)^3}, f_{xy}=-\dfrac{12}{(1-2x+3y)^2}$, $f_{yy}=\dfrac{18}{(1-2x+3y)^3}, f_{xxx}=\dfrac{48}{(1-2x+3y)^4}, f_{xxy}=-\dfrac{72}{(1-2x+3y)^4}, f_{xyy}=\dfrac{108}{(1-2x+3y)^4}$, $f_{yyy}=-\dfrac{162}{(1-2x+3y)^4}$ なので $f(0,0)=1, f_x(0,0)=2, f_y(0,0)=-3, f_{xx}(0,0)=8, f_{xy}(0,0)=-12, f_{yy}(0,0)=18, f_{xxx}(0,0)=48, f_{xxy}(0,0)=-72, f_{xyy}(0,0)=108, f_{yyy}(0,0)=-162$ となる。$f(x,y)$ を $(0,0)$ で最もよく近似する 1 次式は

$$f(0+h,0+k)\sim 1+2h-3k$$

であり，最もよく近似する 2 次式は

$$f(0+h,0+k)\sim 1+2h-3k+4h^2-12hk+9k^2$$

であり，最もよく近似する 3 次式は

$$f(0+h,0+k)\sim 1+2h-3k+4h^2-12hk+9k^2+8h^3-36h^2k+54hk^2-27h^3$$

となる。

(3) $f_x=f_y=\cos(x+y), f_{xx}=f_{xy}=f_{yy}=-\sin(x+y), f_{xxx}=-\cos(x+y), f_{xxy}=-\cos(x+y), f_{xyy}=-\cos(x+y), f_{yyy}=-\cos(x+y)$ なので $f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=0, f_x\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=-1, f_y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=-1, f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=0, f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=0, f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=0, f_{xxx}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=1, f_{xxy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=1, f_{xyy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=1, f_{yyy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=1$ となる。$f(x,y)$ を $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ で最もよく近似する 1 次式は

$$f(\frac{\pi}{2}+h,\frac{\pi}{2}+k)\sim -h-k$$

であり，最もよく近似する 2 次式は

$$f(\frac{\pi}{2}+h,\frac{\pi}{2}+k)\sim -h-k$$

であり，最もよく近似する 3 次式は

$$f(\frac{\pi}{2}+h,\frac{\pi}{2}+k)\sim -h-k+\frac{1}{6}h^3+\frac{1}{2}h^2k+\frac{1}{2}hk^2+\frac{1}{6}k^3$$

となる。

演習問題 *2.27

(1) $f(a,b)+Df(a,b)$ が (a,b) で $f(x+h,y+k)$ を最もよく近似する 1 次式であることを示せ。

(2) $f(a,b)+Df(a,b)+\dfrac{1}{2!}D^2f(a,b)$ が (a,b) で $f(x+h,y+k)$ を最もよく近似する 2 次式であることを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}D^jf(a,b)$ が (a,b) で $f(x+h,y+k)$ を最もよく近似する n 次式であることを示せ。

(1) $\varepsilon(h,k)=\dfrac{f(a+h,b+k)-(f(a,b+Df(a,b))}{\sqrt{h^2+k^2}}$ とおくと，テーラーの定理より

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}&=f(a+h,b+k)-(f(a,b)+Df(a,b))=R_2=\frac{1}{2!}D^2(thetahk)\\&=\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,b+\theta k)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+\theta h,b+\theta k)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h,b+\theta k)\right)\end{aligned}$$

となる。$M_1=\max\left\{\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,b+\theta k)\right|\ \middle|\ 0\leqq\theta\leqq 1\right\}$, $M_2=\max\left\{\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+\theta h,b+\theta k)\right|\ \middle|\ 0\leqq\theta\leqq 1\right\}$, $M_3=\max\left\{\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h,b+\theta k)\right|\ \middle|\ 0\leqq\theta\leqq 1\right\}$, $M=\max\{M_1,M_2,M_3\}$ とおくと

$$\begin{aligned}&\left|h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,b+\theta k)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+\theta h,b+\theta k)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h,b+\theta k)\right|\\&\leqq M_1h^2+2M_2|h|\,|k|+M_3k^2\leqq Mh^2+2M|h|\,|k|+Mk^2\\&=M\left(h^2+2|h|\,|k|+k^2\right)=M\left(|h|+|k|\right)^2\end{aligned}$$

が成立する。よって

$$|\varepsilon(h,k)| \leqq \frac{1}{2}\frac{M\left(|h|+|k|\right)^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

が成立する。$h=r\cos\theta, k=r\sin\theta$ とおくと，$(h,k)\to(0,0)$ となるとき $r\to 0$ となる。

$$\frac{\left(|h|+|k|\right)^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\left(r|\cos\theta|+r|\sin\theta|\right)^2}{\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}} = \frac{r^2\left(|\cos\theta|+|\sin\theta|\right)^2}{r} = r\left(|\cos\theta|+|\sin\theta|\right)^2$$

より $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}|\varepsilon(h,k)|=0$ が得られる。これより $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成立する。

(2)　$\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(a+h,b+k)-\left(f(a,b)+Df(a,b)+\dfrac{1}{2!}D^2f(a,b)\right)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2}$ とおくと，テーラーの定理より

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k)\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2 &= R_3 = \frac{1}{3!}D^3(a+\theta h,b+\theta k)\\ &= \frac{1}{3!}\sum_{j=0}^{3}h^{3-j}k^j\,{}_3\mathrm{C}_j\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j}y^j}(a+\theta h,b+\theta k)\end{aligned}$$

となる。$M_j=\max\left\{\left|\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j}y^j}(a+\theta h,b+\theta k)\right|\;\middle|\;0\leqq\theta\leqq 1\right\}$ $(j=0,1,2,3)$，$M=\max\{M_0,M_1,M_2,M3\}$ とおくと

$$\begin{aligned}|\varepsilon(h,k)|\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2 &\leqq \frac{1}{3!}D^3(a+\theta h,b+\theta k)\\ &= \frac{1}{3!}\sum_{j=0}^{3}\left|h^{3-j}k^j\,{}_3\mathrm{C}_j\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j}y^j}(a+\theta h,b+\theta k)\right|\\ &= \frac{1}{3!}\sum_{j=0}^{3}\left|h^{3-j}\right|\left|k^j\right|{}_3\mathrm{C}_j\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j}y^j}(a+\theta h,b+\theta k)\right|\\ &\leqq \frac{M}{3!}\sum_{j=0}^{3}{}_3\mathrm{C}_j\left|h^{3-j}\right|\left|k^j\right| = \frac{M}{3!}\left(|h|+|k|\right)^3\end{aligned}$$

が成立する。よって

$$|\varepsilon(h,k)| \leqq \frac{M}{3!}\frac{\left(|h|+|k|\right)^3}{h^2+k^2}$$

が成立し，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}|\varepsilon(h,k)|=0$ が得られる。これより $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成立する。

(3)　$\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(a+h,b+k)-\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}D^jf(a,b)\right)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n}$ とおくと，テーラーの定理より

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k)\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n &= R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}(a+\theta h,b+\theta k)\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}h^{n+1-j}k^j\,{}_{n+1}\mathrm{C}_j\,\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}y^j}(a+\theta h,b+\theta k)\end{aligned}$$

となる。$M_j = \max\left\{ \left| \dfrac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j}(a+\theta h, b+\theta k) \right| \;\middle|\; 0 \leqq \theta \leqq 1 \right\}$ $(j = 0, 1, \ldots, n+1)$,
$M = \max\{\, M_j \mid j = 0, 1, \ldots, n+1 \,\}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
|\varepsilon(h,k)| \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n &\leqq \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}(a+\theta h, b+\theta k) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \left| h^{n+1-j} k^j {}_{n+1}\mathrm{C}_j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j}(a+\theta h, b+\theta k) \right| \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \left| h^{n+1-j} \right| \left| k^j \right| {}_{n+1}\mathrm{C}_j \left| \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j}(a+\theta h, b+\theta k) \right| \\
&\leqq \frac{M}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_j \left| h^{n+1-j} \right| \left| k^j \right| = \frac{M}{(n+1)!} \left(|h|+|k|\right)^{n+1}
\end{aligned}
$$

が成立する。よって

$$
|\varepsilon(h,k)| \leqq \frac{M}{(n+1)!} \frac{\left(|h|+|k|\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n}
$$

が成立し，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} |\varepsilon(h,k)| = 0$ が得られる。これより $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立する。