解析学 I 問題解説 #13

河野

演習問題 3.10　命題 3.9 を証明せよ。

演算子を

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

し，微分方程式を

$$Ly = 0 \tag{1}$$

とする。微分の線型性より $D(ay) = aDy$ が成立している。さらに D を作用させることにより $D^2(ay) = D\left(D(ay)\right) = D\left(aDy\right) = aD\left(Dy\right) = aD^2y$ が成立することが分かる。以下同様に D を作用させることにより自然数 k に対し $D^k(ay) = aD^ky$ が成立する。よって

$$\begin{aligned}
L(ay) &= \left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)(ay)\\
&= a_n(x)D^n(ay) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(ay) + \cdots + a_1(x)D(ay) + a_0(x)(ay)\\
&= aa_n(x)D^ny + aa_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + aa_1(x)Dy + aa_0(x)y\\
&= a\left(a_n(x)D^ny + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + a_1(x)Dy + a_0(x)y\right)\\
&= a\left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)y\\
&= aLy
\end{aligned}$$

が成立する。よって y が線型微分方程式 (1) の解ならば ay も (1) の解である。

微分の線型性より $D(y_1+y_2) = Dy_1 + Dy_2$ が成立している。さらに D を作用させることにより $D^2(y_1+y_2) = D\left(D(y_1+y_2)\right) = D\left(Dy_1+Dy_2\right) = DDy_1 + DDy_2 = D^2y_1 + D^2y_2$ が成立することが分かる。以下同様に D を作用させることにより自然数 k に対し $D^k(y_1+y_2) = D^ky_1 + D^ky_2$ が成立する。よって

$$\begin{aligned}
L(y_1+y_2) &= \left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)(y_1+y_2)\\
&= a_n(x)D^n(y_1+y_2) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(y_1+y_2) + \cdots + a_1(x)D(y_1+y_2) + a_0(x)(y_1+y_2)\\
&= a_n(x)\left(D^ny_1 + D^ny_2\right) + a_{n-1}(x)\left(D^{n-1}y_1 + D^{n-1}y_2\right) + \cdots + a_1(x)\left(Dy_1+Dy_2\right) + a_0(x)\left(y_1+y_2\right)\\
&= a_n(x)D^ny_1 + a_{n-1}(x)D^{n-1}y_1 + \cdots + a_1(x)Dy_1 + a_0(x)y_1\\
&\qquad + a_n(x)D^ny_2 + a_{n-1}(x)D^{n-1}y_2 + \cdots + a_1(x)Dy_2 + a_0(x)y_2\\
&= \left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)y_1\\
&\qquad + \left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)y_2\\
&= Ly_1 + Ly_2
\end{aligned}$$

が成立する。よって y_1 および y_2 が線型微分方程式 (1) の解ならば y_1+y_2 も (1) の解である。

演習問題 3.11　次の微分方程式を演算子法を用いて解け。ただし解関数は複素数値関数でもよいとする。

(1) $y' + y\sin x = 0$
(2) $y' + (x+1)y = 0$
(3) $y' + e^{2x}y = 0$
(4) $y'' - 5y' + 6y = 0$
(5) $y'' - y' - 6y = 0$
(6) $y'' + y = 0$
(7) $y'' + 4y = 0$
(8) $y'' - 2y' + y = 0$
(9) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(1)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + \sin x)y = 0$$

と書き直すことができる。$\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$ より

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} = D + \sin x$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} y = 0$$

となる。両辺に左から $e^{-\cos x}$ をかけると

$$D\big(e^{-\cos x}\big)y = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{-\cos x}y = C$$

となるので

$$y = Ce^{\cos x}$$

である。

(2)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + (x+1))y = 0$$

と書き直すことができる。$\displaystyle\int (x+1)\ dx = \frac{1}{2}x^2 + x$ より

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) = D + (x+1)$$

が成立する。よって微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y = 0$$

となる。両辺に左から $\exp\left(\dfrac{1}{2}x^2 + x\right)$ をかけると

$$D\left(\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\right) y = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y = C$$

となるので

$$y = C\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)$$

である。
(3)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + e^{2x})y = 0$$

と書き直すことができる。$\displaystyle\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$ より

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)D\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) = D + e^{2x}$$

が成立する。よって微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)D\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)y = 0$$

となる。両辺に左から $\exp\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)$ をかけると

$$D\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)y = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)y = C$$

となるので

$$y = C\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

である。
(4)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2 - 5D + 6 = (D-3)(D-2)$ なので微分方程式は $(D-3)(D-2)y = 0$ となる。$u = (D-2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D-3)u = 0$ となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}u = 0$ となるが，両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3}u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-3x}u = C_1$ となるので

$$u = C_1e^{3x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-2)y = C_1e^{3x}$$

となる。

$$e^{2x}De^{-2x} = D-2$$

が成立するので，微分方程式は $e^{2x}De^{-2x}y = C_1e^{3x}$ となるが，両辺に左から e^{-2x} をかけると $De^{-2x}y = C_1e^{x}$ となる。両辺を積分すると $e^{-2x}y = C_1e^{x} + C_2$ となるので一般解は

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$$

となる。

(5)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - D - 6)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2 - D - 6 = (D-3)(D+2)$ なので微分方程式は $(D-3)(D+2)y = 0$ となる。$u = (D+2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D-3)u = 0$ となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D-3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}u = 0$ となるが，両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3x}u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-3x}u = C_1$ となるので

$$u = C_1e^{3x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D+2)y = C_1e^{3x}$$

となる。

$$e^{-2x}De^{2x} = D+2$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-2x}De^{2x}y = C_1e^{3x}$ となるが，両辺に左から e^{2x} をかけると $De^{2x}y = C_1e^{5x}$ となる。両辺を積分すると $e^{2x}y = \dfrac{C_1}{5}e^{5x} + C_2$ となるので $y = \dfrac{C_1}{5}e^{3x} + C_2e^{-2x}$ となる。$\dfrac{C_1}{5}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$$

となる。

(6)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 1)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2 + 1 = (D-i)(D+i)$ なので微分方程式は $(D-i)(D+i)y = 0$ となる。$u = (D+i)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D-i)u = 0$ となる。

$$e^{ix}De^{-ix} = D-i$$

が成立するので，微分方程式は $e^{ix}De^{-ix}u = 0$ となるが，両辺に左から e^{-ix} をかけると $De^{-ix}u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-ix}u = C_1$ となるので

$$u = C_1e^{ix}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D+i)y = C_1 e^{ix}$$

となる。

$$e^{-ix} D e^{ix} = D + i$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-ix} D e^{i} y = C_1 e^{ix}$ となるが，両辺に左から e^{ix} をかけると $De^{ix}y = C_1 e^{2ix}$ となる。両辺を積分すると $e^{ix}y = \dfrac{C_1}{2i} e^{2ix} + C_2$ となるので $y = \dfrac{C_1}{2i} e^{ix} + C_2 e^{-ix}$ となる。$\dfrac{C_1}{2i}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

となる。
(7)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 4)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2 + 4 = (D-2i)(D+2i)$ なので微分方程式は $(D-2i)(D+2i)y = 0$ となる。$u = (D+2i)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D-2i)u = 0$ となる。

$$e^{2ix} D e^{-2ix} = D - 2i$$

が成立するので，微分方程式は $e^{2ix} D e^{-2ix} u = 0$ となるが，両辺に左から e^{-2ix} をかけると $De^{-2ix}u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-2ix}u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{2ix}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D+2i)y = C_1 e^{2ix}$$

となる。

$$e^{-2ix} D e^{2ix} = D + 2i$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-2ix} D e^{2ix} y = C_1 e^{2ix}$ となるが，両辺に左から e^{2ix} をかけると $De^{2ix}y = C_1 e^{4ix}$ となる。両辺を積分すると $e^{2ix}y = \dfrac{C_1}{4i} e^{4ix} + C_2$ となるので $y = \dfrac{C_1}{4i} e^{2ix} + C_2 e^{-2ix}$ となる。$\dfrac{C_1}{4i}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix}$$

となる。
(8)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D + 1)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2 - 2D + 1 = (D-1)(D-1)$ なので微分方程式は $(D-1)(D-1)y = 0$ となる。$u = (D-1)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D-1)u = 0$ となる。

$$e^{x} D e^{-x} = D - 1$$

が成立するので，微分方程式は $e^x De^{-x}u = 0$ となるが，両辺に左から e^{-x} をかけると $De^{-x}u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-x}u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^x$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-1)y = C_1 e^x$$

となる。

$$e^x De^{-x} = D - 1$$

が成立するので，微分方程式は $e^x De^{-x}y = C_1 e^x$ となるが，両辺に左から e^{-x} をかけると $De^{-x}y = C_1$ となる。両辺を積分すると $e^{-x}y = C_1 x + C_2$ となるので一般解は

$$y = C_1 x e^x + C_2 e^x$$

となる。

(9)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2+4D+4 = (D+2)(D+2)$ なので微分方程式は $(D+2)(D+2)y = 0$ となる。$u = (D+2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+2)u = 0$ となる。

$$e^{-2x} De^{2x} = D + 2$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-2x}De^{2x}u = 0$ となるが，両辺に左から e^{2x} をかけると $De^{2x}u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{2x}u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{-2x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D+2)y = C_1 e^{-2x}$$

となる。

$$e^{-2x} De^{2x} = D + 2$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-2x}De^{2x}y = C_1 e^{-2x}$ となるが，両辺に左から e^{2x} をかけると $De^{2x}y = C_1$ となる。両辺を積分すると $e^{2x}y = C_1 x + C_2$ となるので一般解は

$$y = C_1 x e^{-2x} + C_2 e^{-2x}$$

となる。

演習問題 3.12　次の微分方程式を実数値関数の範囲で解け。

(1) $y'' + y = 0$　　(2) $y'' + \omega^2 y = 0 \quad (0 \neq \omega \in \mathbb{R})$

(3) $y'' - y' + y = 0$　　(4) $y'' - 2y' + 2y = 0$

(1)　微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

　オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いて変形する。$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x$ なので

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} = C_1 (\cos x + i \sin x) + C_2 (\cos x - i \sin x) \\ &= (C_1 + C_2) \cos x + (iC_1 - iC_2) \sin x \end{aligned}$$

と変形できる。$A_1 = C_1 + C_2, A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 \cos x + A_2 \sin x$$

という表示が得られる。

(2)　微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$y = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

　オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いて

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x} = C_1 (\cos \omega x + i \sin \omega x) + C_2 (\cos \omega x - i \sin \omega x) \\ &= (C_1 + C_2) \cos \omega x + (iC_1 - iC_2) \sin \omega x \end{aligned}$$

と変形する。$A_1 = C_1 + C_2, A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 \cos \omega x + A_2 \sin \omega x$$

という表示が得られる。

(3)　微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$C_1 \exp\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} x\right)$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

$\exp\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} x\right) = \exp\left(\frac{1}{2} x\right) \exp\left(i\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$ と変形してオイラーの公式を用いて

$$\begin{aligned} y &= C_1 \exp\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} x\right) \\ &= C_1 \exp\left(\frac{1}{2} x\right)\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} x + i \sin\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1}{2} x\right)\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} x - i \sin\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \\ &= (C_1 + C_2) \exp\left(\frac{1}{2} x\right) \cos\frac{\sqrt{3}}{2} x + (iC_1 - iC_2) \exp\left(\frac{1}{2} x\right) \sin\frac{\sqrt{3}}{2} x \end{aligned}$$

と変形する。$A_1 = C_1 + C_2, A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + A_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

という表示が得られる。
(4)　微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$C_1 \exp\left((1+i)\,x\right) + C_2 \exp\left((1-i)\,x\right)$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。
　$\exp\left((1+i)\,x\right) = e^x e^{ix}$ と変形してオイラーの公式を用いて

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^x \left(\cos x + i\sin x\right) + C_2 e^x \left(\cos x - i\sin x\right) \\ &= \left(C_1 + C_2\right) e^x \cos x + \left(iC_1 - iC_2\right) e^x \sin x \end{aligned}$$

と変形する。$A_1 = C_1 + C_2, A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 e^x \cos x + A_2 e^x \sin x$$

という表示が得られる。

演習問題 3.13　　次が成立することを示せ。
　2 次式 $\varphi(t) = t^2 + at + b$ に対し方程式 $\varphi(t) = 0$ は解 α, β を持つとする。微分方程式

$$\left(D^2 + aD + b\right) y = 0$$

を考える。この微分方程式の一般解は $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

であり，$\alpha = \beta$ のとき

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

　$\varphi(t) = 0$ の 2 解を α, β とすると $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$ より $\varphi(t) = (t-\alpha)(t-\beta)$ が成立する。このとき

$$(D-\alpha)(D-\beta) = D(D-\beta) - \alpha(D-\beta) = DD - D\beta - \alpha D + \alpha\beta$$

となるが β は定数なので $D\beta = \beta D$ が成立するので

$$\begin{aligned} &= D^2 - \beta D - \alpha D + \alpha\beta = D^2 - (\alpha+\beta)D + \alpha\beta \\ &= D^2 + aD + b \end{aligned}$$

が成立する。$u = (D-\beta)y$ とおくと u に関する微分方程式は

$$(D-\alpha)u = 0$$

となる。$e^{\alpha x}De^{-\alpha x} = D-\alpha$ より $e^{\alpha x}De^{-\alpha x}u = 0$ となるが，両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると $De^{-\alpha x}u=0$ となる。両辺を積分すると $e^{-\alpha x}u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{\alpha x}$$

となる。よって y についての微分方程式は $(D-\beta)y = C_1 e^{\alpha x}$ となる。

$$e^{\beta x}De^{-\beta x} = D-\beta$$

が成立するので微分方程式は $e^{\beta}De^{-\beta x}y = C_1 e^{\alpha x}$ となるが，両辺に左から $e^{-\beta}$ をかけると

$$De^{-\beta x}y = C_1 e^{(\alpha-\beta)x}$$

となる。

ここで場合分けを行う。$\alpha \neq \beta$ のときは両辺を積分すると

$$e^{-\beta x}y = \frac{C_1}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)x} + C_2$$

となるのでとなる。

$$y = \frac{C_1}{\alpha-\beta}e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

$\dfrac{C_1}{\alpha-\beta}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。

$\alpha = \beta$ のときは $e^{(\alpha-\beta)x} = 1$ なので両辺を積分すると

$$e^{-\alpha x}y = C_1 x + C_2$$

となるので一般解は

$$y = C_1 x e^{\alpha} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

演習問題 3.14　次が成立することを示せ。

$\varphi(t) = t^2 + at + b = 0$ は実数解を持たないとする。$\varphi(t) = 0$ の複素解を $\lambda_1 \pm i\lambda_2$ $(\lambda_2 \neq 0)$ とする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

の実数値関数としての一般解は

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x}\cos\lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x}\sin\lambda_2 x$$

である。ここで C_1, C_2 は実数である任意定数。

$\varphi(t)=0$ の 2 解を α,β とすると $\varphi(t)=(t-\alpha)(t-\beta)$ が成立する。ただしここで $\alpha=\lambda_1+i\lambda_2$, $\beta=\lambda_1-i\lambda_2$ とする。このとき

$$D^2+aD+b=(D-\alpha)(D-\beta)$$

が成立する。$u=(D-\beta)y$ とおくと u に関する微分方程式は

$$(D-\alpha)u=0$$

となる。$e^{\alpha x}De^{-\alpha x} = D-\alpha$ より $e^{\alpha x}De^{-\alpha x}u = 0$ となるが，両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると $De^{-\alpha x}u=0$ となる。両辺を積分すると $e^{-\alpha x}u=C_1$ となるので

$$u=C_1e^{\alpha x}$$

となる。よって y についての微分方程式は $(D-\beta)y=C_1e^{\alpha x}$ となる。

$$e^{\beta x}De^{-\beta x}=D-\beta$$

が成立するので微分方程式は $e^{\beta}De^{-\beta x}y=C_1e^{\alpha x}$ となるが，両辺に左から $e^{-\beta}$ をかけると

$$De^{-\beta x}y=C_1e^{(\alpha-\beta)x}$$

となる。今 $\alpha-\beta=2i\lambda_2\neq 0$ に注意して両辺を積分すると

$$e^{-\beta x}y=\frac{C_1}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)x}+C_2$$

となるのでとなる。

$$y=\frac{C_1}{\alpha-\beta}e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$$

$\dfrac{C_1}{\alpha-\beta}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$$

となる。これは複素関数としての表示なので，これを書き直す。

オイラーの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を用いて

$$\begin{aligned}
y&=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}=C_1e^{(\lambda_1+i\lambda_2)x}+C_2e^{(\lambda_1-i\lambda_2)x}\\
&=C_1e^{\lambda_1 x}e^{i\lambda_2 x}+C_2e^{(\lambda_1-i\lambda_2)x}\\
&=C_1e^{\lambda_1 x}(\cos\lambda_2 x+i\sin\lambda_2 x)++C_2e^{\lambda_1 x}(\cos\lambda_2 x-i\sin\lambda_2 x)\\
&=(C_1+C_2)\,e^{\lambda_1 x}\cos\lambda_2 x+(iC_1-iC_2)\,e^{\lambda_1 x}\sin\lambda_2 x
\end{aligned}$$

と変形する。C_1+C_2, iC_1-iC_2 をあらためて C_1,C_2 に置き直すと

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}\cos\lambda_2 x+C_2e^{\lambda_1 x}\sin\lambda_2 x$$

が得られる。