解析学 I 問題解説 #14

河野

演習問題 3.16　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$　(2) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^2 + x$　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = x + 4$

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = \sin 2x$　(6) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$

非同次型は直接演算子法でもできるし，ここで紹介した，同次型の一般解と非同次型の特殊解を求めることによってもできる。ここでは 2 通りの方法を述べる。

(1)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D-3)y = e^{2x}$$

と書き直すことができる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D-3$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{3x}De^{-3x}y = e^{2x}$$

となる。両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$D\left(e^{-3x}\right)y = e^{-x}$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{-3x}y = -e^{-x} + C$$

となるので

$$y = -e^{2x} + Ce^{3x}$$

である。

同次型の一般解と非同次型の特殊解を求めることで解を求める。

同次型の一般解は e^{2x} を 0 に変更しで同様に計算すればできるので省略する。各自計算すること。ここでは結果だけ使用する。$(D-3)y = 0$ の一般解は $y_1 = Ce^{3x}$ である。$(D-3)y = e^{2x}$ の特殊解を $y_2 = Ae^{2x}$ の形をしていると予想する。$Dy_2 = 2Ae^{2x}$ なので

$$(D-3)y_2 = Dy_2 - 3y_2 = 2Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = -Ae^{2x} = e^{2x}$$

より，$A = -1$ なので特殊解は $y_2 = -e^{2x}$ である。よって求める解は $y = y_1 + y_2 = Ce^{3x} - e^{2x}$ である。

(2)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D+2)y = \sin x$$

と書き直すことができる。

$$e^{-2x}De^{2x} = D+2$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{-2x}De^{2x}y=\sin x$$

となる。両辺に左から e^{2x} をかけると

$$D\big(e^{2x}\big)y=e^{2x}\sin x$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{2x}y=\frac{2}{5}e^{2x}\sin x-\frac{1}{5}e^{2x}\cos x+C$$

となるので

$$y=\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x+Ce^{-2x}$$

である。

$(D+2)y=0$ の一般解を y_1 とすると $y_1=Ce^{-2x}$ である (これも各自計算すること)。$(D+3)y=\sin x$ の特殊解 y_2 を $y_2=A\sin x+B\cos x$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D+2)y_2&=Dy_2+2y_2=A\cos x-B\sin x+2A\sin x+2B\cos x\\&=(2A-B)\sin x+(A+2B)\cos x\end{aligned}$$

である。これが $\sin x$ になるためには $2A-B=1, a+2B=0$ であればよい。よって $A=\dfrac{2}{5}, B=-\dfrac{1}{5}$ となるので，$y_2=\dfrac{2}{5}\sin x-\dfrac{1}{5}\cos x$ である。よって解は

$$y=y_1+y_2=Ce^{-2x}+\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x$$

である。

(3)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D+3)y=x^2+x$$

と書き直すことができる。

$$e^{-3x}De^{3x}=D+3$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{-3x}De^{3x}y=x^2+x$$

となる。両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$D\big(e^{3x}\big)y=e^{3x}\left(x^2+x\right)$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{3x}y=\frac{1}{3}e^{3x}x^2+\frac{1}{9}e^{3x}x-\frac{1}{27}e^{3x}+C$$

となるので

$$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x-\frac{1}{27}+Ce^{-3x}$$

である。

$(D+3)y=0$ の一般解を y_1 とすると $y_1=Ce^{-3x}$ である (各自計算せよ)。$(D+3)y=x^2+x$ の特殊解 y_2 を $y_2=Ax^2+Bx+C$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D+3)y_2 &= Dy_2+3y_2=2Ax+B+3Ax^2+3Bx+3C\\ &=3Ax^2+(2A+3B)x+B+3C=x^2+x\end{aligned}$$

より $3A=1,2A+3B=1,B+3C=0$ を得る。これを解くと $A=\dfrac{1}{3},B=\dfrac{1}{9},C=-\dfrac{1}{27}$ より $y_2=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{9}x-\dfrac{1}{27}$ となる。よって

$$y=y_1+y_2=Ce^{-3x}+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x-\frac{1}{27}$$

である。
(4)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2-2D-3)y=x+4$$

と書き直すことができる。$D^2-2D-3=(D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y=x+4$ となる。$u=(D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u=x+4$ となる。

$$e^{-x}De^{x}=D+1$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-x}De^{x}u=x+4$ となるが，両辺に左から e^x をかけると $De^xu=(x+4)e^x$ となる。両辺を積分すると $e^xu=xe^x+3e^x+C_1$ となるので

$$u=x+3+C_1e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-3)y=x+3+C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x}=D-3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y=x+3+C_1e^{-x}$ となるが，両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3x}y=xe^{-3x}+3e^{-3x}+C_1e^{-4x}$ となる。両辺を積分すると

$$e^{-3x}y=-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{10}{9}e^{-3x}-\frac{C_1}{4}e^{-4x}+C_2$$

となるので $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{10}{9}-\dfrac{C_1}{4}e^{-x}+C_2e^{3x}$ となる。$-\dfrac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y=-\frac{1}{3}x-\frac{10}{9}+C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$$

となる。

$(D^2-2D-3)y=0$ の一般解を y_1 とすると，$y_1=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ である (各自計算せよ)。$(D^2-2D-3)y=x+4$ の特殊解を $y_2=Ax+B$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D^2-2D-3)y_2&=D^2y_2-2Dy_2-3y_2=-2A-3Ax-3B\\&=-3Ax+(-2A-3B)=x+4\end{aligned}$$

より $-3A=1,-2A-3B=4$ を得る。これを解くと $A=-\dfrac{1}{3},B=-\dfrac{10}{9}$ となる。$y_2=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{10}{9}$ なので

$$y=y_1+y_2=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{3}x-\frac{10}{9}$$

である。

(5)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2-2D-3)y=\sin 2x$$

と書き直すことができる。$D^2-2D-3=(D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y=\sin x$ となる。$u=(D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u=\sin x$ となる。

$$e^{-x}De^{x}=D+1$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-x}De^{x}u=\sin x$ となるが，両辺に左から e^{x} をかけると $De^{x}u=e^{x}\sin 2x$ となる。両辺を積分すると $e^{x}u=\dfrac{1}{5}e^{x}\sin 2x-\dfrac{2}{5}e^{x}\cos 2x+C_1$ となるので

$$u=\frac{1}{5}\sin x-\frac{2}{5}\cos x+C_1e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-3)y=\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{2}{5}\cos 2x+C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x}=D-3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y=\dfrac{1}{5}\sin x-\dfrac{2}{5}\cos x+C_1e^{-x}$ となるが，両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3x}y=\dfrac{1}{5}e^{-3x}\sin 2x-\dfrac{2}{5}e^{-3x}\cos 2x+C_1e^{-4x}$ となる。両辺を積分すると x

$$e^{-3x}y=\frac{4}{65}e^{-3x}\cos 2x-\frac{7}{65}e^{-3x}\sin 2x-\frac{C_1}{4}e^{-4x}+C_2$$

となるので $y=\dfrac{4}{65}\cos 2x-\dfrac{7}{65}\sin 2x-\dfrac{C_1}{4}e^{-x}+C_2e^{3x}$ となる。$-\dfrac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y=\frac{4}{65}\cos 2x-\frac{7}{65}\sin 2x+C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$$

となる。

$(D^2-2D-3)y=0$ の一般解 y_2 は $y_2=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ である (各自計算せよ)。$(D^2-2D-3)y=\sin 2x$ の特殊解を $y_2=A\cos 2x+B\sin 2x$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D^2-2D-3)y_2 &= D^2y_2-2Dy_2-3y_2\\ &= -4A\cos 2x-4B\sin 2x-4B\cos 2x+4A\sin 2x-3A\cos 2x-3B\sin 2x\\ &= (-7A-4B)\cos 2x+(4A-7B)\sin 2x\end{aligned}$$

より $-7A-4B=0, 4A-7B=1$ を得る。よって $A=\dfrac{4}{65}, B=-\dfrac{7}{65}$ なので解は

$$y=y_1+y_2=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+\frac{4}{65}\cos 2x-\frac{7}{65}\sin 2x$$

である。

(6)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2-2D-3)y=e^{2x}$$

と書き直すことができる。$D^2-2D-3=(D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y=e^{2x}$ となる。$u=(D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u=e^{2x}$ となる。

$$e^{-x}De^{x}=D+1$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-x}De^xu=e^{2x}$ となるが，両辺に左から e^x をかけると $De^xu=e^{3x}$ となる。両辺を積分すると $e^xu=\dfrac{1}{3}e^{3x}+C_1$ となるので

$$u=\frac{1}{3}e^{2x}+C_1e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-3)y=\frac{1}{3}e^{2x}+C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x}=D-3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y=\dfrac{1}{3}e^{2x}+C_1e^{-x}$ となるが，両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3x}y=\dfrac{1}{3}e^{-x}+C_1e^{-4x}$ となる。両辺を積分すると

$$e^{-3x}y=-\frac{1}{3}e^{-x}-\frac{C_1}{4}e^{-4x}+C_2$$

となるので $y=-\dfrac{1}{3}e^{2x}-\dfrac{C_1}{4}e^{-x}+C_2e^{3x}$ となる。$-\dfrac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y=-\frac{1}{3}e^{2x}+C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$$

となる。

$(D^2-2D-3)y=0$ の一般解は $y_1=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ である。$(D^2-2D-3)y=e^{2x}$ の特殊解 y_2 を $y_2=Ae^{2x}$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D^2-2D-3)y_2 &= D^2y_2-2Dy_2-3y_2\\ &= 4Ae^{2x}-4Ae^{2x}-3Ae^{2x}\\ &= -3Ae^{2x}=e^{2x}\end{aligned}$$

より $A=-\dfrac{1}{3}$ である。よって一般解は

$$y=y_1+y_2=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{3}e^{2x}$$

である。