解析学 I に対する追加説明#1

- 演習 1.11 は講義で述べた結果を使ってもいいし，定義に基づいて最初から計算してもよい。

- 最初は結果を使用して慣れてきたら「定義に基づいて」やる，というのがいいかもしれない。

  最終的には「定義に基づいて計算せよ」と要求されたらできるようにしておくこと。

- 演習問題が少ないので新たな例を取り上げる。$y = f(x) = \log x$ で $a = 1$ とする。

  最初は演習問題 1.10 の結果を使用する。演習問題 1.10(の解答) は次の内容である。

  > $y = f(x) = f(a+h)$ を $x = a$ のまわりで一番よく近似する 3 次式は $x = a + h$ とするとき
  >
  > $$g(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{6}h^3$$
  >
  > である。

- $f(x) = \log x, a = 1$ である。$f'(x) = \dfrac{1}{x}$，$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$，$f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{x^3}$ なので $f(1) = 0$，$f'(1) = 1$，$f''(1) = -1$，$f^{(3)}(1) = 2$ である。よって求める 3 次式は

  $$g(h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3$$

  である。

- 次は定義に基づいて求める。

$g(h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3$ が $x = a$ のまわりで $y = f(x) = f(a+h)$ を最もよく近似する 3 次式であるとは, $d(h) = f(a+h) - g(h), \varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h^3}$ とおくとき

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

が成立することである。

- $d(h) = \varepsilon(h)h^3$ なので $\displaystyle\lim_{h \to 0} d(h) = 0$ が成立する。よって

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \to 0} d(h) = \lim_{h \to 0} \left(f(1+h) - g(h)\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\log(1+h) - \left(A + Bh + Ch^2 + Dh^3\right)\right) \\ &= 0 - A \end{aligned}$$

より $A = 0$ である。

- $\dfrac{d(h)}{h} = \varepsilon(h)h^2$ なので $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{d(h)}{h} = 0$ が成立する。よって

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \to 0} \frac{d(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - g(h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h) - (0 + Bh + Ch^2 + Dh^3)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{1+h} - \left(B + 2Ch + 3Dh^2\right)}{1} \qquad \text{(ロピタルの定理を使用)} \\ &= 1 - B \end{aligned}$$

より $B = 1$ である。

- $\dfrac{d(h)}{h^2} = \varepsilon(h)h$ なので $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^2} = 0$ が成立する。よって

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-g(h)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)-(0+h+Ch^2+Dh^3)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-\left(+1+2Ch+3Dh^2\right)}{2h} && \text{(ロピタルの定理を使用)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+h)^2}-(2C+6Dh)}{2} && \text{(ロピタルの定理を使用)} \\
&= \frac{-1-2C}{2}
\end{aligned}$$

  より $C = -\dfrac{1}{2}$ である。

- $\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ が成立する。よって

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-g(h)}{h^3} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)-(0+h+Ch^2+Dh^3)}{h^3} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-\left(+1+2Ch+3Dh^2\right)}{3h^2} && \text{(ロピタルの定理を使用)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+h)^2}-(2C+6Dh)}{6h} && \text{(ロピタルの定理を使用)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{(1+h)^3}-(6D)}{6} && \text{(ロピタルの定理を使用)} \\
&= \frac{2-6D}{6}
\end{aligned}$$

  より $D = \dfrac{1}{3}$ である。

- 以上により求める 3 次式は

$$g(h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3$$

  である。