解析学 I に対する追加説明#2

- テーラーの定理を用いた近似についてもう一度説明する。
- 近似と誤差の評価にはテーラーの定理が使われる。テーラーの定理とは次である。

> 次を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。
>
> $$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n$$
>
> $R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ であり，これを**剰余項**と呼ぶ。

- $x = a + h$ とする。h を用いて表すと

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + R_n$$

となる。また $c = a + \theta(x-a)$ とするとき，剰余項を $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n$ と書くこともある。

- 剰余項 R_n を切り捨てた $n-1$ 次式

$$g(h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k$$

で $f(a+h)$ を近似する。このとき誤差

$$\Delta = f(a+h) - g(h)$$

は R_n である。

- 次の演習 1.18 を例にする。

> $f(x) = e^x$ を $a = 0, n = 6$ としてテイラーの定理を用いて表し，その剰余項 R_6 を切り捨てることにより $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。
> 更に同様な方法で誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決め近似値を求めよ。計算実行には電卓等を用いてよい

- $f(x) = e^x$ とすると $f^{(n)}(x) = e^x$ なので

$$
\begin{aligned}
f(h) &= \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} h^k + R_6 \\
&= 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \frac{1}{4!}h^4 + \frac{1}{5!}h^5 + R_6 \qquad (R_6 = \frac{e^c}{6!}h^6)
\end{aligned}
$$

となる。ここで c は $h > 0$ なら $0 < c < h$, $h < 0$ なら $h < c < 0$ を満たす。$g(h) = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} h^k$ とすると

$$f(h) = g(h) + R_6$$

である。

- $\frac{1}{\sqrt{e}} = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ の近似値は $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{e}} &\fallingdotseq g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{5!}\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \\
&= \frac{2329}{3840} = 0.606510416
\end{aligned}
$$

となる。$-\frac{1}{2} < c < 0$ なので $0 < e^c < e^0 = 1$ となる。よって誤差は

$$|\Delta| = |R_6| = \left| \frac{e^c}{6!}\left(-\frac{1}{2}\right)^6 \right| < \frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{46080} = 2.170138888888889 \times 10^{-5}$$

と評価できる。

- 剰余項 R_n は

$$|R_n| = \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} h^n \right| = \frac{e^c}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-10}$$

を満たしていればよい。不等式を計算すると $n! \cdot 2^n > 10^{10}$ となる。$n = 11$ のとき

$$11! \cdot 2^{11} = 81749606400 > 10^{10}$$

となるので $g_{10}(x) = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} x^k$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \fallingdotseq g_{10}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2253801941}{3715891200} = 0.6065306597243751$$

- $\sqrt{e}$ の近似計算をするために e の近似計算を用いて計算していた人がいた。この方法は間違いではないが，誤差の評価には注意が必要である。

- $n=6$ として近似計算をする。テーラーの定理より

$$e^h = 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \frac{1}{4!}h^4 + \frac{1}{5!}h^5 + \frac{e^c}{6!}h^6$$

となる。

$$g_5(h) = 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \frac{1}{4!}h^4 + \frac{1}{5!}h^5$$

とおくと e の近似値として

$$e \fallingdotseq g_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60}$$

を得るので

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{\dfrac{163}{60}}} = 0.60671093570926$$

- テーラーの定理から得られる誤差 Δ は

$$\left| e - \frac{163}{60} \right| = |\Delta| = \left| \frac{e^c}{6!}1^6 \right| < \frac{e}{6!} < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} \tag{1}$$

は e と $\dfrac{163}{60}$ の誤差であり，$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ と $\sqrt{\dfrac{60}{163}}$ との誤差ではない。

- 式 (1) より

$$-\frac{1}{240} < e - \frac{163}{60} < \frac{1}{240}$$

$$\frac{217}{80} = \frac{163}{60} - \frac{1}{240} < e < \frac{163}{60} + \frac{1}{240} = \frac{653}{240}$$

- $y = \sqrt{x}$ は単調増加なので

$$\sqrt{\frac{217}{80}} < \sqrt{e} < \sqrt{\frac{653}{240}}$$

$y = \dfrac{1}{x}$ は $x > 0$ で単調減少なので

$$0.6072 > \frac{1}{\sqrt{\dfrac{217}{80}}} > \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{\sqrt{\dfrac{653}{240}}} > 0.6062$$