解析学 I に対する追加説明#3

- テーラーの定理は次のものであった。

> 次を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。
>
> $$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n$$
>
> $R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ であり，これを**剰余項**と呼ぶ。

- 関数 f が何回でも微分可能で，$R_n \to 0\,(n \to \infty)$ が成立するとき，テイラーの定理から

> $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

  が得られる。これを $x = a$ におけるテーラー級数という。

- だから「テーラー級数を求めよ」という問題は,

$$R_n \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{1}$$

  を仮定すれば n **次導関数を求める**問題である。

- 条件 (1) が成立するとき，f は $x = a$ で**テーラー級数展開可能**というが，我々は通常このことを仮定する。

- 次の問題を考える

> $f(x) = \log(x+2)$ の $x = 0$ におけるテーラー級数を求めよ。

- n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ の形を予想するため何回か微分してみる。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x+2} \\
f''(x) &= -(x+2)^{-2} \\
f^{(3)}(x) &= 2(x+2)^{-3}
\end{aligned}
$$

- ここで $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)(x+1)^{-n}$ と予想しても良いが，この予想は正しくない。

- 更に微分すると

$$
\begin{aligned}
f^{(4)}(x) &= -6(x+2)^{-4} \\
f^{(5)}(x) &= 24(x+2)^{-5} \\
f^{(6)}(x) &= -120(x+2)^{-6}
\end{aligned}
$$

となる。

- $6 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$，$24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$，$120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$ に気がつけば

$$
f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(x+2)^{-n} \tag{2}
$$

という予想を思いつくのは難しいことではないであろう。

- 問題では数学的帰納法で証明せよとは要求していないが，ここでは証明しよう。

$$
f'(x) = \frac{1}{x+2} = (-1)^{1+1}(1-1)!(x+2)^{-1}
$$

なので $n = 1$ のとき成立している。

- $n = k$ のとき成立することを仮定する。即ち

$$
f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(x+2)^{-k}
$$

の成立を仮定する。両辺を x で微分すると

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^{k+1}(k-1)!(x+2)^{-k}\right)' \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)!(-k)(x+2)^{-k-1} \\
&= (-1)^{(k+1)+1}(k+1-1)!(x+2)^{-(k+1)}
\end{aligned}
$$

となり，$n = k+1$ でも成立している。

- 式 (2) は $n = 0$ では成立していないことに注意すること。$n = 0$ のときは

  $$f^{(0)}(x) = f(x) = \log(x + 2)$$

  であるから $f^{(0)}(0) = \log 2$ である。

  $n \geqq 1$ のときは

  $$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!2^{-k}$$

  である。

- よって

  $$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f^{(0)}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ &= \log 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!2^{-k}}{k!}x^k \\ &= \log 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k}x^k \end{aligned}$$

  が得られる。