

解析学 I に対する追加説明 #4

- 級数は得られる場合は一意的 (一通りに決まる) であることが知られている。即ち $x = a$ における級数が 2 つあったとする。それを $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$ とすると, 任意の k に対し $a_k = b_k$ である。
- この事実を用いれば導関数を求めなくても求められる場合がある。次の問題を考える。

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ を $x = 0$ でテーラー展開せよ。ただし $-1 < x < 1$ とする。

- x を $-1 < x < 1$ を満たす実数とする。初項 1 公比 x の等比数列の和を考えると

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n$$

が成立する。ここで $n \rightarrow \infty$ とすると $x^n \rightarrow 0$ なので

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (1)$$

となる。

- 次に前問を用いて次の問題を考える。

$g(x) = \frac{1}{1+x}$ を $x = 0$ でテーラー展開せよ。

式 (1) に $-x$ を代入すると

$$\begin{aligned} g(x) &= f(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \end{aligned} \quad (2)$$

が得られる

- 次に前問を用いて次の問題を考える。

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ を } x=0 \text{ でテーラー展開せよ。}$$

式 (2) に x^2 を代入すると

$$h(x) = g(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

が得られる