解析学Iに対する追加説明#6

- テーラーの定理，テーラー級数について復習する。
- **テーラーの定理**とは次である。

> 次を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する。
>
> $$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n \tag{1}$$
>
> $R_n=\dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ であり，これを**剰余項**と呼ぶ。

- $x=a+h$ とおくと (1) は

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+R_n$$

と書ける。

- また $c=a+\theta h$ とおくと剰余項は

$$R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n$$

となる。c の範囲は

$$\begin{aligned} &a<x \text{ のとき}\quad a<c<x\\ &x<a \text{ のとき}\quad x<c<a \end{aligned}$$

である。

- $x=a$ における**テーラー級数**とは次である。

> $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{2}$$

- テーラーの定理とテーラー級数は勿論密接に関連しているが，形で見ると，テーラー級数はテーラーの定理と比べ

  (1) 剰余項がない。

  (2) 和が有限和ではなく無限和である。

  という特徴を持つ。この 2 つをきちんと区別してとらえることが大切である。

- 最初の応用は極値問題であった。

  $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0$ とする。

  (1) n が偶数のとき $f(x)$ は $x = a$ で極値をとる。

  1) $f^{(n)}(a) > 0$ のとき $f(a)$ は極小である。

  2) $f^{(n)}(a) < 0$ のとき $f(a)$ は極大である。

  (2) n が奇数のとき $f(x)$ は $x = a$ で極値をとらない。

  1) $f^{(n)}(a) > 0$ のとき $f(a)$ は増加の状態にある。

  2) $f^{(n)}(a) < 0$ のとき $f(a)$ は減少の状態にある。

  この定理を用いると多くの場合に極値判定ができる。この定理で判定できないのは $f^{(n)}(a) \neq 0$ となる自然数 n が存在しない場合，すなわちすべての自然数 n に対し $f^{(n)}(a) = 0$ となる場合のみである。

- 次にテーラーの定理を用いて近似計算を行った。近似値を求めるとともにその近似値の誤差を評価することも重要なことであった。

- 次の問題を例にとる。

  $f(x) = \sin x$ を $a = 0, n = 6$ としてテイラーの定理を用いて表し，その剰余項 R_6 を切り捨てることにより $\sin \dfrac{\pi}{10}$ の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。
  更に同様な方法で誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決め近似値を求めよ。

- テーラーの定理を適用するため高次導関数を求める。
  $f(x) = \sin x$ とおくと
  $$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x, \quad f^{(5)}(x) = \cos x, \quad f^{(6)}(x) = -\sin x \end{aligned}$$
  なので
  $$\begin{aligned} f(0) &= 0, \quad f^{(2)}(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 0, \\ f'(0) &= 1, \quad f^{(3)}(0) = -1, \quad f^{(5)}(0) = 1 \end{aligned}$$
  となる。$a = 0$，$n = 6$ としてテーラーの定理を書き下すと
  $$\boxed{f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + R_6 \quad \left(R_6 = \frac{-\sin c}{6!}x^6\right) \quad (3)}$$
  となる。
- 剰余項 R_6 を切り捨て
  $$g(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$
  とおく。この多項式 $g(x)$ で $\sin x$ を近似する。
- $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ の近似値は
  $$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) &\fallingdotseq g\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 \\ &= 0.30901705421933 \end{aligned}$$
  となる。
- $f^{(6)}(x) = -\sin x$ なので $\left|f^{(6)}(c)\right| \leqq 1$ となっている。よって誤差は
  $$|\Delta| = \left|\frac{-\sin c}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6\right| \leqq \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < \frac{1}{6!}\left(\frac{4}{10}\right)^6 = 5.688889 \times 10^{-6}$$
  と評価できる。
- $a = 0$ としてテーラーの定理を適用した。$\frac{\pi}{10}$ は 0 にある程度近いので今求めた近似値はある程度の精度をもっている。

- 近似値を求めようとする x の値が a (今の場合 0) から離れると精度は悪くなる。

  そのことを見るため，a から離れた x に対して $\sin x$ を $g(x)$ によって近似計算してみる。

- $x = \dfrac{21\pi}{10}$ として $\sin\left(\dfrac{21\pi}{10}\right)$ の近似値を $g(x)$ を用いて計算しよう。$\dfrac{21\pi}{10} = 2\pi + \dfrac{\pi}{10}$ なので

  $$\sin\left(\frac{21\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

  であるが近似値は

  $$\begin{aligned}\sin\left(\frac{21\pi}{10}\right) \fallingdotseq g\left(\frac{21\pi}{10}\right) &= \frac{21\pi}{10} - \frac{1}{6}\left(\frac{21\pi}{10}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{21\pi}{10}\right)^5 \\ &= 62.89043157076685\end{aligned}$$

  となる。sin の近似値なので真の値は -1 と 1 の間にあるが近似値は大きくずれている。誤差を評価すると

  $$\begin{aligned}|\Delta| &= \left|\frac{-\sin c}{6!}\left(\frac{21\pi}{10}\right)^6\right| \leqq \frac{1}{6!}\left(\frac{21\pi}{10}\right)^6 < \frac{1}{6!}\left(\frac{21\cdot 4}{10}\right)^6 \\ &= 58549.671936\end{aligned}$$

  となっている。

- $\sin\left(\dfrac{21\pi}{10}\right)$ を $g(x)$ で近似したとき，近似は十分とはいえなかった。しかし x が a から離れていても n を大きくすれば，近似は一般によくなる。

- $a = 0$，$n = 30$ として剰余項をきりすてて得られる多項式を $h(x)$ とおくと

  $$h(x) = \sum_{k=0}^{14} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

  となる。このとき近似値は

  $$\sin\left(\frac{21\pi}{10}\right) \fallingdotseq h\left(\frac{21\pi}{10}\right) = 0.30901699731125$$

となる。

誤差を評価すると

$$|\Delta| = \left| \frac{-\sin c}{30!} \left(\frac{21\pi}{10} \right)^{30} \right| \leqq \frac{1}{30!} \left(\frac{21\pi}{10} \right)^{30} < \frac{1}{30!} \left(\frac{21 \cdot 4}{10} \right)^{30}$$
$$= 2.0170585596971046 \times 10^{-5}$$

となっている。

- 勿論普通は n を大きくするのではなく，$\dfrac{21\pi}{10}$ に近く sin の値が分かる a (今の場合 $a = 2\pi$) を選んで計算する。
- 問題に戻ろう。問題の後半が残っている。
- 誤差が与えられた値以下になるように n を選ぼう。

  $f^{(n)}(x)$ は $\pm \sin x, \pm \cos x$ のいずれかなので $\left| f^{(n)}(x) \right| \leqq 1$ が成立する。剰余項 R_n は

$$|R_n| = \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} h^n \right| \leqq \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^n < \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{5} \right)^n < 10^{-10}$$

  を満たしていればよい。不等式は $n! \times \left(\dfrac{5}{2} \right)^n > 10^{10}$ となる。

  $n = 10$ のとき

$$10! \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^{10} = \frac{138427734375}{4} = 3.460693359375 \times 10^{10} > 10^{10}$$

  となるので $n = 10$ とする。
- $g_9(x) = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \dfrac{1}{7!}x^7 + \dfrac{1}{9!}x^9$ とおくと

$$\sin \left(\frac{\pi}{10} \right) \fallingdotseq g_9 \left(\frac{\pi}{10} \right) = 0.30901699437502$$

- 3 番目の応用としてテーラー級数を扱った。テーラー級数とは次の級数である。

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}$$

  これを $x = a$ でのテーラー級数と言う。

- 「$x = a$ でのテーラー級数」という用語を見て x に a を代入した人がいたが，もちろんこれは間違い。$x = a$ のまわりでこの形になっているという意味であり，x に a を代入すると

$$f(a) = f(a)$$

という正しいが，今の場合意味のない式になる。

- 次の問題を考える。

> $f(x) = x^2 \log x$ とする。$x = 1$ でテーラー級数展開せよ。
> ただし級数展開可能なことは仮定する。

- テーラー展開可能を示すためには

(1) $f(x)$ が何回でも微分可能である

(2) テーラーの定理において剰余項を R_n とするとき

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0$$

の 2 つを示す必要がある。今の場合これを仮定してよいので，$f(x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めればよい。

- 何回か微分してみる。

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \log x + x \\
f''(x) &= 2 \log x + 3 \\
f^{(3)}(x) &= 2x^{-1} \\
f^{(4)}(x) &= -2x^{-2} \\
f^{(5)}(x) &= 4x^{-3} \\
f^{(6)}(x) &= -12x^{-4}
\end{aligned}$$

$n \geq 3$ のとき $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} 2 \cdot (n-3)! x^{-(n-2)}$ と予想される。

- この予想を数学的帰納法で証明する。出発点は $n = 3$ である。

- $n = 3$ のときは

$$f^{(3)}(x) = 2x^{-1} = (-1)^{3+1} 2 \cdot (3-3)! x^{-(3-2)}$$

となり成立している。

- $n=k$ のとき成立を仮定する。すなわち

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}2\cdot(k-3)!x^{-(k-2)}$$

の成立を仮定する。このとき

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x)&=\left(f^{(k)}(x)\right)'\\
&=\left((-1)^{k+1}2\cdot(k-3)!x^{-(k-2)}\right)'\\
&=(-1)^{k+1}2\cdot(k-3)!(-(k-2))x^{-(k-2)-1}\\
&=(-1)^{k+1}(-1)2\cdot(k-3)!(k-2)x^{-k+1}\\
&=(-1)^{(k+1)+1}2\cdot((k+1)-3)!x^{-((k+1)-2)}
\end{aligned}$$

となるので $n=k+1$ でも成立している。よって数学的帰納法より証明された。

- $k\geq 3$ のとき $x=1$ を代入すると

$$f^{(k)}(1)=(-1)^{k+1}2(k-3)!$$

となる。また

$$\begin{aligned}
&f^{(0)}(1)=f(1)=0\\
&f^{(1)}(1)=1\\
&f^{(2)}(1)=3
\end{aligned}$$

である。

- よって求めるテーラー級数は

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k\\
&=f(1)+f^{(1)}(1)(x-1)+\frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k\\
&=(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2}{k(k-1)(k-2)}(x-1)^k
\end{aligned}$$

となる。