# 解析学 I に対する追加説明#7

- 2 変数関数の極限値に関して復習する。
- 多項式関数 $z = f(x, y)$ は 1 変数の場合と同様に連続なので

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

となる。

- 演習問題 2.3 を例にする。(1) は分母の極限が 0 でないので商の極限が使用できる。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+2}{x+y-1} = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2+2\right)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y-1)} = \frac{2}{-1} = -2$$

- どのような近づき方をしても一定の値に近づくとき 2 変数関数の極限値は収束する。

(3) を考える。$x = 1+r\cos\theta, y = 1+r\sin\theta$ とおくと $(x, y) \to (1, 1)$ と $r \to 0$ は同じである。

$$\frac{(x-1)^3+(y-1)^3}{(x-1)^2+(y-1)^2} = \frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$$

となる。

$$-1 \leq \cos\theta, \sin\theta \leq 1$$

より

$$-1 \leq \cos^3\theta, \sin^3\theta \leq 1$$

よって

$$-2 \leq \cos^3\theta + \sin^3\theta \leq 2$$

より

$$-2r \leq r\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) \leq 2r$$

なのではさみうちの定理より

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^3+(y-1)^3}{(x-1)^2+(y-1)^2} = 0$$

となる。

- 収束しない前項の否定なので

  (1) ある近づき方で収束しない，または

  (2) 2 通りの近づき方をしたとき，ともに収束するが極限値が異なる

  場合である。(5) を考える。

  $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおく。

  $$\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} = \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}$$

  $\theta = 0$ として $r \to 0$ とすると極限値は 1 であり，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ として $r \to 0$ とすると極限値は $\dfrac{2}{3}$ である。よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$ は存在しない。

- (4) を考える。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおく。

  $$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} = \frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r\cos^3\theta + r\sin^3\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}$$

  分子は (2) と同様に

  $$|r\cos^3\theta + r\sin^3\theta| \leqq 2r$$

  となる。分母は

  $$\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta = 1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

  とできるので $-1 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$ より

  $$\frac{1}{2} \leqq \cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta \leqq \frac{3}{2}$$

  これより

  $$0 < \frac{1}{\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta} \leqq 2$$

  が成立する。よって

  $$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\right| \leqq 4r$$

  となるので極限値は 0 である。