解析学 I に対する追加説明#8

- 偏導関数に関して復習する。
- 演習問題 2.12 についてはでは特に問題はないようである。例えば $z = e^{ax^2+by^2}$ の x に関する偏導関数は y を定数と見て x で微分するので
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2axe^{ax^2+by^2}$$
となる。
- ただ
$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x + y^2$$
としているものが若干いた。x と y はペアになっており，x で微分するとき y は定数と見て微分していることに注意。
- 演習問題 2.13 は s, t を代入して計算してもできるが，引き続き学ぶ逆関数の微分法に慣れる意味でも，**合成関数の微分法**を使用するのがよいかもしれない。
- $z = \sin x \cos y, x = s^2 - t^2, y = 2st$ を考える。
$$z_s = z_x x_s + z_y y_s$$
より z_x, x_s, z_y, y_s を求めればよい。
$$\begin{aligned}
z_x &= (\sin x \cos y)_x = \cos x \cos y \\
z_y &= (\sin x \cos y)_y = -\sin x \sin y \\
x_s &= 2s \\
y_s &= 2t
\end{aligned}$$
より
$$z_s = 2s \cos x \cos y - 2t \sin x \sin y$$
- 次に z_{ss} を求める。$z_{ss} = (z_s)_s$ なので
$$\begin{aligned}
z_{ss} &= (z_s)_s = (2s \cos x \cos y - 2t \sin x \sin y)_s \\
&= (2s \cos x \cos y)_s - (2t \sin x \sin y)_s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2s)_s \cos x \cos y + 2s \left(\cos x \cos y\right)_s - (2t)_s \sin x \sin y - 2t \left(\sin x \sin y\right)_s \\
&= 2 \cos x \cos y + 2s \left(\cos x \cos y\right)_s - 2t \left(\sin x \sin y\right)_s
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\left(\cos x \cos y\right)_s &= \left(\cos x \cos y\right)_x x_s + \left(\cos x \cos y\right)_y y_s \\
&= -2s \sin x \cos y - 2t \cos x \sin y \\
\left(\sin x \sin y\right)_s &= \left(\sin x \sin y\right)_x x_s + \left(\sin x \sin y\right)_y y_s \\
&= 2s \cos x \sin y + 2t \sin x \cos y
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
z_{ss} &= 2 \cos x \cos y - 4s^2 \sin x \cos y - 4st \cos x \sin y - 4st \cos x \sin y - 4t^2 \sin x \cos y \\
&= 2 \cos x \cos y - 4(s^2 + t^2) \sin x \cos y - 8st \cos x \sin y
\end{aligned}
$$