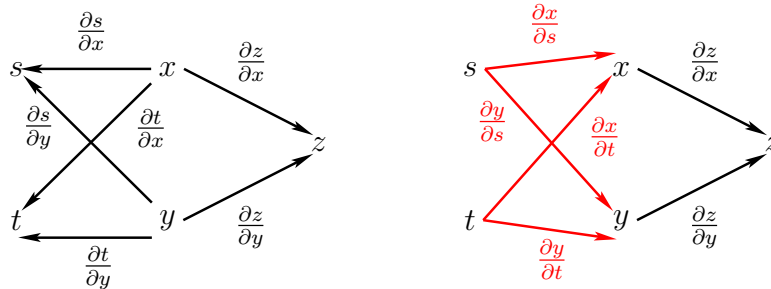


解析学 I に対する追加説明 #9

- 逆関数の微分法について質問が出たので解説しておく。
- $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = x^2 y^2$ を例に考える。

変数間の関係は下図左であって, 下図右ではない。

変数間に下図右のような関係が成立するかが問題であるが, 実はほとんどの場合成立する。



- 最初に 1 変数の場合を考える。 $y = f(x)$ に対し定義域全体では逆関数は存在しないが, 点の周りなら「ほとんど」のところで存在する。きちんと書けば次のようになる。



- a を定義域の内点とし $f'(a) \neq 0$ とする。このとき a を含む開区間 U と $f(a)$ を含む開区間 W が存在して, f を U に制限した関数は

$$f : U \longrightarrow W$$

全単射である。よって W から U への逆関数が存在する。

これを逆関数定理という。

- 2 変数関数の場合は 2 変数関数 2 個の組に対し同様の定理が成立する。これを逆関数定理という。

$x = x(s, t), y = y(s, t)$ を 2 変数関数とする。 $\vec{s} = (s, t), \vec{x} = (x, y)$ とし, 2 変数関数 2 個を組として写像 f を

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{s} \longmapsto \vec{x}$$

とする。 (a, b) が定義域の内点で $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}(a, b) \neq 0$ とする。
 (a, b) を含む開領域 U と $f(\vec{s}) = (x(s, t), y(s, t))$ を含む開領域 W が存在して f を U に制限した関数は

$$f : U \longrightarrow W$$

全単射である。よって W から U への逆関数が存在する。

- 1 変数関数の場合定数関数など特別の場合を除き「ほとんど」の点で $f'(x) \neq 0$ となる。2 変数関数の場合も「ほとんど」の関数の「ほとんど」の点で $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \neq 0$ となる。これは $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = 0$ の解が s, t -平面内の曲線になることから分かる。
- $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \neq 0$ という条件が $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ の逆行列が存在する条件になっていることを注意しておく。
- 問題に戻る。 x_s, y_s を計算するため、 $\frac{D(s, t)}{D(x, y)}$ を求めその逆行列を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{D(s, t)}{D(x, y)} &= \begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} &= \frac{D(x, y)}{D(s, t)} \\ &= \left(\frac{D(s, t)}{D(x, y)} \right)^{-1} = \frac{1}{4xy(x^2 - y^2)} \begin{pmatrix} 2x^2y & -2y \\ -2xy^2 & 2x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2xy(x^2 - y^2)} \begin{pmatrix} x^2y & -y \\ -xy^2 & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- よって

$$x_s = \frac{x^2y}{2xy(x^2 - y^2)} = \frac{x}{2(x^2 - y^2)}, \quad y_s = \frac{-xy^2}{2xy(x^2 - y^2)} = \frac{-y}{2(x^2 - y^2)}$$

$$z_s = z_x x_s + z_y y_s = 1 \frac{x}{2(x^2 - y^2)} + 1 \frac{-y}{2(x^2 - y^2)} = \frac{1}{2(x + y)}$$