解析学 I 要綱 #4

1.6 高次導関数と Taylor の定理

関数 $y=f(x)$ の導関数 $y'=f'(x)$ が微分可能なとき更にその導関数を考えることが出来る。$y=f(x)$ の導関数の導関数を 2 次導関数または 2 階の導関数といい

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f''(x), \quad y''$$

などと表す。$y=f(x)$ の導関数の導関数の導関数を 3 次導関数または 3 階の導関数といい

$$\frac{d^3f}{dx^3}(x), \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad f'''(x), \quad y'''$$

などと表す。n を自然数とする。$f(x)$ を n 回微分して得られる関数を n 次の導関数または n 階の導関数といい

$$\frac{d^nf}{dx^n}(x), \quad \frac{d^ny}{dx^n}, \quad f^{(n)}(x), \quad y^{(n)}$$

と表す。$f^{(0)}(x)$ は $f(x)$ を 0 回微分した 0 次導関数を意味するので，$f^{(0)}(x)=f(x)$ と定義する。2 階以上の導関数を高次導関数と呼ぶ。以下この節では関数は**必要な回数だけ微分可能**であることを仮定する。

関数の和の高次導関数を考える。$F(x)=f(x)+g(x)$ とすると

$$F'(x)=f'(x)+g'(x)$$

であり，もう一度微分すると

$$F''(x)=f''(x)+g''(x)$$

となる。何回微分しても同様なので

$$(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$$

となる。

次に関数の積の高次導関数を考える。$F(x)=f(x)g(x)$ のとき積の微分法より

$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

である。もう一度微分すると

$$\begin{aligned} F''(x) &= f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \\ &= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \end{aligned}$$

となる。更にもう一度微分すると

$$\begin{aligned} F'''(x) &= (f''(x)g(x))' + 2\,(f'(x)g'(x))' + (f(x)g''(x))' \\ &= f'''(x)g(x) + f''(x)g'(x) + 2f''(x)g'(x) + 2f'(x)g''(x) + f'(x)g''(x) + f(x)g'''(x) \\ &= f'''(x)g(x) + 3f''(x)g'(x) + 3f'(x)g''(x) + f(x)g'''(x) \end{aligned}$$

となる。一般に次が成立する。

命題 1.23 [**ライプニッツの定理**]

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

ここで $\binom{n}{k}$ は 2 項係数で $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ である。

例えば $n=4$ のとき

$$(fg)^{(4)} = f^{(4)}g + 4f^{(3)}g^{(1)} + 6f^{(2)}g^{(2)} + 4f^{(1)}g^{(3)} + fg^{(4)}$$

となる。

演習問題 1.15 ライプニッツの定理を数学的帰納法で証明せよ。

2 項係数に関して

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

が成立することは使用してよい。

例 1.24 (1) $f(x) = xe^x$ の n 次導関数を求める。$g(x) = x, h(x) = e^x$ とおくと，$g'(x) = 1$, $g''(x) = 0$, $g^{(k)}(x) = 0$ ($k \geq 2$) であり，$h^{(k)}(x) = e^x$ ($k \geq 0$) なのでライプニッツの定理より

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} h^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) = xe^x + ne^x \end{aligned}$$

となる。

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とする。$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$，$f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$，$f'''(x) = -\dfrac{6}{x^4} = -\dfrac{3!}{x^4}$ なので

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

と予想できる。これを数学的帰納法で証明する。

$n = 1$ のときは

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = (-1)^1 \frac{1!}{x^{1+1}}$$

なので成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{k!}{x^{k+1}}$ を仮定する。両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}\right)' \\ &= (-1)^k(-(k+1))\frac{k!}{x^{k+2}} = (-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{x^{(k+1)+1}} \end{aligned}$$

なので $k+1$ のときも成立する。

演習問題 1.16　次の関数の n 次導関数を求めよ。(問題では「数学的帰納法で示す」ことを要求されてないので，数学的帰納法で証明しなくてもよいが，それを要求されたときはできるようにしておくこと。)

(1) $f(x) = x^4$　　(2) $f(x) = x^3 e^x$

(3) $f(x) = x^3 \log x$　　(4) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(5) $f(x) = \log(x+1)$　　(6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

(7) $f(x) = \sin x$　　(8) $f(x) = \sin x \cos x$

次の定理は「Taylor の定理」と呼ばれ色々な応用がある。

定理 1.25 [Taylor(テーラー) の定理]

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。$R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を**剰余項**と呼ぶ。

証明　天下りではあるが，$R = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$ と置き，

$$F(t) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right) - \frac{R}{(x-a)^n}(x-t)^n$$

と置くと，

$$\begin{aligned}
\frac{dF(t)}{dt} &= -\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}\right) + \frac{R}{(x-a)^n}n(x-t)^{n-1} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} + \frac{R}{(x-a)^n}n(x-t)^{n-1} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \frac{R}{(x-a)^n}n(x-t)^{n-1} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{R}{(x-a)^n}n(x-t)^{n-1} \\
&= -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{R}{(x-a)^n}n(x-t)^{n-1} \\
&= \left(\frac{R}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\right)n(x-t)^{n-1}
\end{aligned}$$

このとき，

$$\begin{aligned}
F(a) &= f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) - \frac{R}{(x-a)^n}(x-a)^n \\
&= f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) - R \\
&= R - R = 0 \\
F(x) &= f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^k\right) - \frac{R}{(x-a)^n}(x-x)^n \\
&= f(x) - f(x) = 0
\end{aligned}$$

が成立するのでロルの定理より $\frac{dF(c)}{dt} = 0$ ($a < c < x$ または $x < c < a$) となる c が存在する。このとき $\frac{R}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = 0$ が成立する。$\theta = \frac{c-a}{x-a}$ と置くと定理が得られる。∎

定理 1.25 は次の形でも述べることができる。

系 1.26 任意の h に対し，ある θ $(0 < \theta < 1)$ が存在して

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!} h^n$$

と表せる。

Taylor の定理については 3 つの応用を学ぶ。最初の応用として極値に関する次の定理を考える。

定理 1.27 $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$ とする。

(1) n が偶数のとき $f(x)$ は $x = a$ で極値をとる。

1) $f^{(n)}(a) > 0$ のとき $f(a)$ は極小である。

2) $f^{(n)}(a) < 0$ のとき $f(a)$ は極大である。

(2) n が奇数のとき $f(x)$ は $x = a$ で極値をとらない。

1) $f^{(n)}(a) > 0$ のとき $f(a)$ は増加の状態にある。

2) $f^{(n)}(a) < 0$ のとき $f(a)$ は減少の状態にある。

証明 (1), (2) とも 1) の場合のみ示す。$f^{(n)}$ が連続かつ $f^{(n)}(a) > 0$ なので a を含むある区間 $(a-\delta, a+\delta)$ において $f^{(n)}(x) > 0$ となる。この区間内の x についてテーラーの定理を適用すると $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ なので $f(x) = f(a) + \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ となる。(1) 即ち n が偶数の場合 $x \neq a$ ならば $(x-a)^n > 0$ なので，$f(x) - f(a) > 0$ 即ち $f(x) > f(a)$ となる。よって f は $x = a$ で極小である。(2) 即ち n が奇数の場合 $x > a$ なら $(x-a)^n > 0$，$x - a < 0$ ならば $(x-a)^n < 0$ である。よって $x > a$ ならば $f(x) > f(a)$，$x < a$ ならば $f(x) < f(a)$ となっている。 ∎

演習問題 1.17 定理 1.27 の (1),(2) の 2) の場合を証明せよ。

具体例を知っていると定理 1.27 の理解が容易になるかもしれない。$y = f(x) = x^2$ とする。$x = 0$ は最小値であり，極小値である。$f'(0) = 0, f''(0) \neq 0$ なので定理の $n = 2$ (偶数) の場合で実際極値になっている。

次に $y = f(x) = x^3$ とする。$f'(0) = f''(0) = 0, f'''(0) \neq 0$ なので定理の $n = 3$ (奇数) の場合で実際極値ではない。実際に $y = f(x) = x^3$ は $x = 0$ で極値をとらないことが知られている。

Taylor の定理の 2 番目の応用として近似がある。3 次式までの近似はすでに扱っているが，Taylor の定理を用いると何次までででも考えることができることに加えて,「誤差の評価がきちんとできる」という利点がある。$n = 2$ の場合を考えてみよう。$n = 2$ の場合

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

となるが，$f''(x)$ は有界なので，$x - a$ が非常に小さいとき，最後の項は (**非常に**)^2 小さい。よってこの項を切り捨てる。これは線型近似を与えた。

真の値 $f(x)$ と近似値 $f(a) + f'(a)(x-a)$ の差を**誤差**と言うが，誤差の絶対値が最大どれ位になるかを評価しよう。誤差を Δ とすると

$$\Delta = f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a)) = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$$

となるので $|f''(x)|$ の最大値を

$$M = \max\{\, |f''(x)| \mid x \in I \,\} \qquad (I = [\, a,\, x\,] \text{ または } [\, x,\, a\,])$$

とすると

$$|\Delta| \leq \frac{M}{2}|x-a|^2$$

が分かる。

例を考える。$f(x) = \sin x$, $x = \dfrac{5\pi}{16}$, $a = \dfrac{\pi}{4}$ とする。$n = 2$ として Taylor の定理を用い剰余項を切り捨てると近似値は

$$\sin\left(\frac{5\pi}{16}\right) \fallingdotseq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{5\pi}{16} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{16}$$

である。$f''(x) = -\sin x$ より $M = \max\{\, |f''(x)| \mid x \in I \,\} = 1$ なので誤差の最大値は

$$|\Delta| = \left|\frac{f''(x)}{2}(x-a)^2\right| \leq \left|\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\right| < \frac{1}{2}\left(\frac{4}{16}\right)^2 = \frac{1}{32}$$

であることが分かる。

次に $n = 3$ の場合を考える。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3$$

$x-a$ が非常に小さいとき最後の項は (**非常に**)^3 小さい。この項を切り捨て $f(x)$ を

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

で近似する。これは線型近似より一般的にはよりよい近似になっている。

前に考えた $f(x)=\sin x$, $x=\dfrac{5\pi}{16}$, $a=\dfrac{\pi}{4}$ で $n=3$ の場合を考える。近似値および誤差の最大値は

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{5\pi}{16}\right) &\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{5\pi}{16}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{5\pi}{16}-\frac{\pi}{4}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{16}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{16}\right)^2 \\
|\Delta| &= \left|\frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3\right| \leq \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{16}\right)^3 < \frac{1}{6}\left(\frac{4}{16}\right)^3 = \frac{1}{384}
\end{aligned}$$

となる。

関数 $f(x)=f(a+h)$ を h に関する n 次式 $g(h)$ で近似することを考える。$d(h)=f(a+h)-g(h), \varepsilon(h)=\dfrac{d(h)}{h^n}$ とおく。$\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立するとき $g(h)$ を $f(a+h)$ を $x=a$ のまわりで一番よく近似する n 次式という。

命題 1.28 $f(x)$ に対し h に関する n 次式

$$g(h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k$$

は $f(a+h)$ を $x=a$ のまわりで一番よく近似する n 次式である。

証明 $d(h)=f(a+h)-g(h)=\dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$ なので $\varepsilon(h)=\dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h$ となる。$M=\max\left\{|f^{(n+1)}(a+\theta h)| \,\middle|\, 0\leq\theta\leq 1\right\}$ とおくと $|\varepsilon(h)|\leq\dfrac{M}{(n+1)!}|h|$ が成立する。よって $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立する ∎

自然対数の底 e の近似計算をこの方法により考える。$f(x)=e^x, a=0, x=0+h$ とする。$f'(x)=e^x$ より，任意の n に対し $f^{(n)}(x)=e^x$ となる。剰余項 R_{n+1} を切り捨てた近似式を $g_n(x)$ とすると

$$g_n(h)=1+h+\frac{1}{2!}h^2+\cdots+\frac{1}{n!}h^n$$

となる。$a_n=g_n(1)$ が e の近似値を与える。$n=10$ とすると

$$\begin{aligned} a_{10} &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!} \\ &= 2.718281801 \end{aligned}$$

となる。a_{10} の誤差 Δ はテーラーの定理で $n=11$ としたときの剰余項なので

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \left|\frac{f^{(11)}(c)}{11!}(1-0)^{11}\right| = \frac{e^c}{11!} \leq \frac{e}{11!} < \frac{3}{11!} \\ &= 7.515632515632516\times 10^{-8} \end{aligned}$$

今行った計算は n を決めて誤差を求めた。次に誤差をある程度以下になるように n を決定することを考える。

e の近似値を 10^{-10} 以下の誤差になるように求めたいとする。剰余項 R_n が誤差になるので

$$|\Delta|=|R_n|=\frac{e^c}{n!}\leq\frac{e}{n!}<\frac{3}{n!}<10^{-10}$$

を満たす n を，即ち $n!>3\times10^{10}$ を満たす n を求めればよい。これを満たす最小の n は

$$14!=87178291200>8.7\times10^{10}>3\times10^{10}$$

より 14 である。よって

$$a_{13}=2.718281828446759$$

が求めるものになる。

演習問題 1.18　$f(x)=e^x$ を $a=0, n=6$ としてテイラーの定理を用いて表し，その剰余項 R_6 を切り捨てることにより $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。

更に同様な方法で誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決め近似値を求めよ。計算実行には電卓等を用いてよい [(1)]。

[(1)] 厳密には電卓の計算誤差も考慮する必要がある。10 桁程度なので電卓等の誤差は無視することにする

演習問題 1.19　$f(x) = \cos x$ を $a = 0, n = 6$ としてテイラーの定理を用いて表し，その剰余項 R_6 を切り捨てることにより $\cos \dfrac{\pi}{10}$ の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。

更に同様な方法で誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決め近似値を求めよ。計算実行には電卓等を用いてよい。

3 番目の応用として Taylor 級数展開がある。関数が何回でも微分可能であり，テーラーの定理の剰余項 $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ が $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となるとき，関数は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

と表すことができる。これを $x = a$ での**テーラー級数**と言い，このとき $f(x)$ は $x = a$ でテーラー (級数) 展開可能であるという。これから考える $f(x)$ が**テーラー展開可能**であることは**仮定しておく**。

$f(x) = e^x, a = 0$ とする。$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ なのでテーラー級数は

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

となる。

$f(x) = \sin x$ のときは，$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f''''(x) = \sin x \ldots$ より，$f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n-1}\cos x, f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ なので $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}, f^{(2n)}(0) = 0$ である。テーラー級数は

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots\end{aligned}$$

となる。

$f(x) = \cos x$ のとき $f^{(2n-1)}(x) = (-1)^n \sin x, f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$ より $f^{(2n-1)}(0) = 0, f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ である。$\cos x$ のテーラー級数は

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\end{aligned}$$

となる。

演習問題 1.20　次の関数の $x = 0$ におけるテーラー級数を求めよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。この問題のテーラー級数は $-1 < x < 1$ の場合のみ考える。一般の実数 α と自然数 n に対し

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n \geq 1), \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

と定義する。これは α が自然数の場合の 2 項係数の拡張になっている。

(1) $f(x) = \log(1+x)$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(3) $f(x) = \sqrt{1+x}$　　(4) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$　　(6) $f(x) = e^{2x}$

(7) $f(x) = \sin 3x$　　(8) $f(x) = \log(2x+3)$

演習問題 1.21　次の関数を $x = a$ でテーラー (級数) 展開せよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x) = x^5 \quad (a=1)$　　(2) $f(x) = e^x \quad (a=1)$

(3) $f(x) = \sin x \quad (a=\pi)$　　(4) $f(x) = \log x \quad (a=1)$

(5) $f(x) = e^{3x} \quad (a=2)$　　(6) $f(x) = \sin x \quad \left(a = \dfrac{\pi}{2}\right)$

(7) $f(x) = \cos 2x \quad \left(a = \dfrac{\pi}{2}\right)$

e^x の級数展開の x に形式的に ix (i は虚数単位即ち $\sqrt{-1}$) を代入することにより，オイラーは次の**オイラーの公式**を導いた。

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(ix)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(ix)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(ix)^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i \cdot i^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
&= \cos x + i \sin x
\end{aligned}$$

オイラーの公式と指数法則を知っていれば 3 角関数の加法定理は自然に出て来る。オイラーの公式より $e^{ix} = \cos x + i\sin x$，$e^{iy} = \cos y + i \sin y$，$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$ を得る。$e^{i(x+y)} =$

$e^{ix}e^{iy}$ なので，

$$\begin{aligned}\cos(x+y)+i\sin(x+y) &= (\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)\\ &= (\cos x\cos y-\sin x\sin y)+i(\sin x\cos y+\cos x\sin y)\end{aligned}$$

この式の実部同士，虚部同士を比較すると加法定理が得られる。

演習問題 ***1.22** 　次を示せ。$1 \le p \le n$ を満たす実数 p に対し

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する。

$$R_n=\frac{(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n$$

を**ロシュの剰余項**と呼ぶ。$p=n$ とすると定理 1.25 の剰余項になる。これを**ラグランジェの剰余項**という。$p=1$ としたものを**コーシーの剰余項**と呼ぶ。

演習問題 ***1.23** 　次の関数がテーラー級数展開可能であること，即ち剰余項 R_n に対し $\lim_{n\to\infty} R_n=0$ が成立することを示せ。最初の 3 つの式は任意の x について成立するが，最後の 2 つには制限がつく。

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}\\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}\\ \log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k \qquad (-1<x<1)\\ \left(1+x\right)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \qquad (-1<x<1)\end{aligned}$$

演習問題 ***1.24** 　次の関数は何回でも微分可能であるが，$x=0$ でテーラー級数展開可能でないことを次にしたがって示せ。

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$$

(1) $g(t)$ を n 次の多項式とするとき $\lim_{t\to\infty}\dfrac{g(t)}{e^t}=0$ が成立することを n に関する数学的帰納法で示せ ($n=0$ から始めること)。

(2) $f^{(n)}(x)$ はある多項式 $P_n(t)$ を用いて

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \\ 0 & (x\leq 0) \end{cases}$$

と表されることを n に関する数学的帰納法で示せ ($n=0$ から始めること)。

(3) $f(x)$ が $x=0$ でテーラー級数展開可能だと仮定すると矛盾することを示せ。

テーラー級数は色々な応用があるが，ここでは極限に対する応用のみを扱う。$\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$ をテーラー級数を利用して求めてみよう。

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$

なので

$$\cos x-1=-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$
$$\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}x^2+\cdots$$

となる。よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

となる。

演習問題 1.25　テーラー級数を用いて次の極限値を求めよ。それぞれの関数のテーラー級数は既知としてよい。

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)}$　　(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

(5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\log(1+x)}{x^2}$　　(6) $\lim_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$