

2.6 高階偏導関数とテーラーの定理

f_{xy} は f を最初は x で微分し次に y で微分したものである。 f_{yx} は f を最初は y で微分し次に x で微分したものであり、この 2 つは一般に違うものである。しかしある条件の元では一致する。

定理 2.23 [シュワルツの定理] 点 (a, b) の近傍で f_x, f_y, f_{xy} が存在して f_{xy} が (a, b) で連続ならば f_{yx} も存在して $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ が成立する。

演習問題 *2.24 定理 2.23 を証明せよ。

定義 2.24 関数 $f(x, y)$ に対し f_x および f_y が存在して共に連続であるとき関数 $f(x, y)$ は C^1 級であるという。定理 2.11 より C^1 級であれば全微分可能である。

f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} および f_{yy} が存在してすべての 2 階の偏導関数が連続のとき関数 $f(x, y)$ は C^2 級であるという。 f が C^2 級のとき定理 2.23 より $f_{xy} = f_{yx}$ が成立する。

関数 $f(x, y)$ が n 階までの導関数がすべて存在して連続であれば C^n 級であるという。関数 $f(x, y)$ が C^n 級であれば、 n 階までの導関数は x, y で微分した回数と同じであればその順序によらず決る (→ 演習問題 2.25)。

演習問題 2.25 定理 2.23 を仮定して次を示せ。

(1) $z = f(x, y)$ が C^3 級ならば

$$z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}, \quad z_{yyx} = z_{yxy} = z_{xyy}$$

が成立する。

(2) * $z = f(x, y)$ が C^n 級であるとする。 α を x または y が k 個 ($0 \leq k \leq n-2$) 並んだもの、 β を x または y が $n-k-2$ 個並んだものとする

$$z_{\alpha xy \beta} = z_{\alpha y x \beta}$$

が成立する。例えば $\alpha = xy, \beta = yy$ のときは $z_{xyxyyy} = z_{xyyyxy}$ を意味する。

(3) * $z = f(x, y)$ が C^n 級ならば n 階の導関数は x, y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

以下この節では関数は何回でも微分できることを仮定し、それを特に断らないことにする。

多変数のテーラーの定理を述べるために次の記号を導入する。この記号を使用しないと、定理を書き下すだけで結構な手間である。

定義 2.25 $\frac{\partial}{\partial x}$ を独立したものとして扱い $\frac{\partial}{\partial x} f$ は $\frac{\partial}{\partial x}$ が f に作用していると見なす。このとき形式的に $D = h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$ と定義し、 Df を $Df = h\frac{\partial}{\partial x} f + k\frac{\partial}{\partial y} f$ と定義する。また $D^2 = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ なので

$$D^2 f = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} f + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} f + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} f$$

と考える。一般に $D^n = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r h^{n-r} k^r \frac{\partial^n}{\partial x^{n-r} \partial y^r}$ なので

$$D^n f = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f = \sum_{r=0}^n {}_n C_r h^{n-r} k^r \frac{\partial^n}{\partial x^{n-r} \partial y^r} f$$

と考える。

定理 2.26 [テーラーの定理]

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} D^j f(a, b) + \frac{1}{n!} D^n f(a+\theta h, b+\theta k) \\ &= f(a, b) + Df(a, b) + \cdots + \frac{1}{j!} D^j f(a, b) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} f(a, b) \\ &\quad + \frac{1}{n!} D^n f(a+\theta h, b+\theta k) \end{aligned}$$

となる θ ($0 < \theta < 1$) が存在する。 $n = 1$ の場合 (2 変数関数の) 平均値の定理と呼ばれる。

1 変数の定理の場合と同様に、定理の $\frac{1}{n!} D^n f(a+\theta h, b+\theta k)$ の項を剰余項といい R_n で表す。

演習問題 2.26 定理 2.26 を証明せよ。

定理 2.26 は D という記号を用いて記述しているので, 1 変数の定理と同じ様に見えるが, 書き下してみると 1 変数よりも複雑である。 $n = 3$ のときに定理を D という記号を用いずに書く。

$$D^0 f = f \qquad Df = hf_x + kf_y$$

$$D^2 f = h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy} \quad D^3 f = h^3 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy}$$

なので

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b)$$

$$+ \frac{1}{2} (h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b))$$

$$+ \frac{1}{6} (h^3 f_{xxx}(a + \theta h, b + \theta k) + 3h^2 k f_{xxy}(a + \theta h, b + \theta k)$$

$$+ 3hk^2 f_{xyy}(a + \theta h, b + \theta k) + k^3 f_{yyy}(a + \theta h, b + \theta k))$$

となる。

演習問題 2.27 $n = 4$ のとき定理 2.26 を D を用いないで記述せよ。また $n = 5$ のときも記述せよ。

ここでは剰余項を無視した近似を考える。

関数は $z = f(x, y) = x^2 e^y$ で点は $(a, b) = (1, 1)$ とする。最初に $n = 2$ の場合を考える。 $f_x = 2xe^y$, $f_y = x^2 e^y$ なので $f(1, 1) = e$, $f_x(1, 1) = 2e$, $f_y(1, 1) = e$ である。よって

$$f(1+h, 1+k) \doteq e + 2eh + ek$$

である。これは関数 f を $(1, 1)$ の周りで h, k に関する 1 次式で近似している式である (今の場合は接平面の方程式)。1 変数のときと同じように「近似の最もよい 1 次式」を定義する。 $x = a+h, y = b+k$ とする。

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - (A + Bh + Ck)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおく。 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立するとき, $A+Bh+Ck$ は (a, b) で $f(x, y) = f(a+h, b+k)$ を「最もよく近似する」1 次式と呼ぶ。この例でいうと $e + 2eh + ek$ は $(a, b) = (1, 1)$ で $f(x, y) = x^2 e^y$ を最もよく近似する 1 次式である (証明は演習問題 2.29)。

$n = 3$ の場合は

$$f(1+h, 1+k) \doteq e + 2eh + ek + eh^2 + 2ehk + \frac{1}{2} ek^2$$

この式は 2 次式による近似になっている。

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - (A + Bh + Ck + Dh^2 + Ehk + Fk^2)}{(\sqrt{h^2 + k^2})^2}$$

とおく。 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立するとき, $A + Bh + Ck + Dh^2 + Ehk + Fk^2$ は (a, b) で $f(x, y) = f(a+h, b+k)$ を「最もよく近似する」2 次式と呼ぶ。この例でいうと $e + 2eh + ek + eh^2 + 2ehk + \frac{1}{2}ek^2$ は $(a, b) = (1, 1)$ で $f(x, y) = x^2e^y$ を最もよく近似する 2 次式である (証明は演習問題 2.29)。

n を大きくしていくと高い次数の式による近似になり, 一般に近似が良くなるのは 1 変数の場合と同様である。 $g(h, k)$ を h, k に関する n 次式とする。

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - g(h, k)}{(\sqrt{h^2 + k^2})^n}$$

とおく。 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立するとき, $g(h, k)$ は (a, b) で $f(x, y)$ を「最もよく近似する」 n 次式と呼ぶ。この定義とテーラーの定理との関連については演習問題 2.29 参照のこと。

1 変数の場合と同様に 2 変数でも級数展開が考えられるがこの講義では取扱わない。極値問題への応用は次節で扱う。

演習問題 2.28 次の関数を (a, b) において最もよく近似する 1 次式, 2 次式および 3 次式求めよ。ただし演習問題 2.29 の結果は用いてもよい。

$$(1) z = f(x, y) = (x-1)(y+2) \quad (a, b) = (0, 0)$$

$$(2) z = f(x, y) = \frac{1}{1-2x+3y} \quad (a, b) = (0, 0)$$

$$(3) z = f(x, y) = \sin(x+y) \quad (a, b) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

演習問題 *2.29

(1) $f(a, b) + Df(a, b)$ が (a, b) で $f(x, y)$ を最もよく近似する 1 次式であることを示せ。

(2) $f(a, b) + Df(a, b) + \frac{1}{2!}D^2f(a, b)$ が (a, b) で $f(x, y)$ を最もよく近似する 2 次式であることを示せ。

(3) $\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}D^j f(a, b)$ が (a, b) で $f(x, y)$ を最もよく近似する n 次式であることを示せ。