$\boxed{\text{解析学 I 問題解説 \#2}}$ 河野

1 1 変数の微分

演習問題 ****1.1** 定理 1.2 を証明せよ (以下微積分の基礎を厳密に取り扱う演習問題には $(*)$ を 2 つつける。)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ の数学的な定義は

$$\forall\varepsilon(>0) \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

である。

数列は収束するので以下 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする。

(1) 1) ε を任意の正の実数とする。任意の ε に対して上の定義の様な N が存在するので，特に $\frac{\varepsilon}{2}$ に対してもある N_1 が存在する。即ち $N_1 \in \mathbb{N}$ で

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ n > N_1 \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものが存在する。また b_n に対しても同様なので，$N_2 \in \mathbb{N}$ で

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ n > N_2 \implies |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものが存在する。このとき $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと，$n > N$ となる任意の自然数 n に対し $n > N_1$ かつ $n > N_2$ が成立するので，

$$\begin{aligned}\bigl|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)\bigr| &= \bigl|(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)\bigr| \\ &\leq \bigl|a_n - \alpha\bigr| + \bigl|b_n - \beta\bigr| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

が成立する。途中で三角不等式 $(|x + y| \leq |x| + |y|)$ を使用した。

2) $k = 0$ のとき数列は $ka_n = 0$ であり，示すべき式は $|ka_n - k\alpha| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$ なので成立している。よって $k \neq 0$ とする。

ε を任意の正の実数とする。任意の ε に対して上の定義の様な N が存在するので，特に $\frac{\varepsilon}{|k|}$ に対してもある N が存在する。即ち $N \in \mathbb{N}$ で

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ n > N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

を満たすものが存在する。このとき

$$n > N \implies |ka_n - k\alpha| = |k(a_n - \alpha)| = |k| \cdot |a_n - \alpha| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

が成立するので。$\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ が成立する。

3) 最初に，収束する数列は有界であること，即ち a_n が収束するとき，

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n| \leqq M$$

が成立することを示す。任意の ε に対し N が存在するので，特に 1 に対しある自然数 N が存在し $n > N$ に対し $|a_n - \alpha| < 1$ が成立する。このとき $-1 < a_n - \alpha < 1$ が成立するので，$\alpha - 1 < a_n < \alpha + 1$ が成立する。このとき $M = \max\{\, |a_1|.|a_2|, \ldots, |a_N|, |\alpha+1|, |\alpha-1| \,\}$ とおく。任意の自然数 n に対し，$n \leqq N$ のときは $|a_n| \leqq M$ が成立する。$n > N$ のときは

$$\alpha - 1 < a_n < \alpha + 1$$

が成立するので，いずれの場合も $|a_n| \leqq M$ が成立し，有界であることが示された。a_n は α に収束するので，上に述べた性質をもつ M が存在する。

最初に $\beta = 0$ の場合を考える。ε を任意の正数とする。b_n は 0 に収束するのである自然数 N が存在して，任意の n に対し

$$n > N \implies |b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

が成立する。このとき

$$|a_n b_n - \alpha\beta| = |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

となるので，この場合は証明された。よって $\beta \neq 0$ とする。

ε を任意の正数とする。b_n は β に収束するので，$\dfrac{\varepsilon}{2M}$ に対しある自然数 N_2 が存在して

$$n > N_2 \implies |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

が成立する。また $\dfrac{\varepsilon}{2|\beta|}$ に対し自然数 N_1 が存在して

$$n > N_1 \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$$

が成立する。$N = \max\{\, N_1, N_2 \,\}$ とおくと，$n > N$ のとき

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha\beta| &= |(a_n b_n - a_n\beta) + (a_n\beta - \alpha\beta)| \\ &\leqq |a_n| \cdot |(b_n - \beta)| + |(a_n - \alpha)| \cdot |\beta| \\ &\leqq M \cdot |(b_n - \beta)| + |(a_n - \alpha)| \cdot |\beta| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|\beta|} |\beta| = \varepsilon \end{aligned}$$

となるので証明された。

4) $\beta \neq 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$$

を示せば，(3) の結果とあわせれば (4) が証明される。よってこの命題を証明する。ε として $\dfrac{|\beta|}{2}$ をとると，ある自然数 N_1 が存在して，$n > N_1$ のとき

$$|b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$$

が成立する。このとき $-\dfrac{|\beta|}{2} < b_n - \beta < \dfrac{|\beta|}{2}$ が成立するので，$\beta - \dfrac{|\beta|}{2} < b_n < \beta + \dfrac{|\beta|}{2}$ が成立する。このことから $n > N_1$ のとき $|b_n| > \dfrac{|\beta|}{2}$ が成立する。また b_n は β に収束するので，$\dfrac{|\beta|^2}{2}\varepsilon$ に対し自然数 N_2 が存在して $n > N_2$ のとき

$$|b_n - \beta| < \frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon$$

が成立する。$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと，$n > N$ のとき

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \left|\frac{\beta - b_n}{\beta b_n}\right| = \frac{|\beta - b_n|}{|\beta|\cdot|b_n|} < \frac{2|\beta - b_n|}{|\beta|\cdot|\beta|} < \frac{2}{|\beta|\cdot|\beta|}\frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

となる。

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とし，背理法で証明する。即ち $\alpha > \beta$ が成立することを仮定する。$\varepsilon = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ とする。収束の定義より

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n > N_1 \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n > N_2 \implies |b_n - \beta| < \varepsilon$$

$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ は

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

であるが

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha - \frac{\alpha - \beta}{2} < a_n < \alpha + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

となる。

$|b_n - \beta| < \varepsilon$ は

$$\beta - \varepsilon < b_n < \beta + \varepsilon$$

であるが

$$\beta - \frac{\alpha - \beta}{2} < b_n < \beta + \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと $n > N$ のとき

$$b_n < \frac{\alpha + \beta}{2} < a_n$$

となるがこれは $a_n < b_n$ に矛盾する。よって示された。

(3)　任意の正の実数を ε とする。a_n，c_n は A に収束するので

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n > N \implies A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n > N \implies A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

が成立する。$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと $n > N$ のとき

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$$

が成立するので b_n は A に収束する。

演習問題 ****1.2**　定理 1.3 を証明せよ

$\{a_n\}$ を上に有界な単調増加数列とする。$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおくと集合 A は上に有界である。実数の連続性に関する公理 (ワイエルシュトラスの公理) より A には上限 (最小上界) が存在する。これを α とする。α は上界であるから

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ a_n \leqq \alpha$$

が成立する。α は最小上界なので，$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\alpha - \varepsilon$ は A の上界ではない。即ち

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \ \alpha - \varepsilon < a_N$$

が成立する。このとき任意の自然数 n に対し $n > N$ とすると $a_N \leqq a_n$ が成立する。よって

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leqq a_n \leqq \alpha < \alpha + \varepsilon$$

となる。まとめると

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成立するので，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ となる。

演習問題 1.3　数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 0, a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1$ で帰納的に定義される数列とする。
(1)　任意の自然数 n に対し $a_{n+1} - a_n \geqq 0$ が成立することを数学的帰納法で示せ。
(2)　任意の自然数 n に対し $a_n \leqq 2$ が成立することを示せ。

(1)　$a_2 = \dfrac{1}{2}a_1 + 1 = 1$ なので $a_{1+1} - a_1 = 1 - 0 = 1 \geqq 0$ であり，$n = 1$ のとき命題は成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する，即ち $a_{k+1} - a_k \geqq 0$ の成立を仮定する。このとき $a_{k+2} = \dfrac{1}{2}a_{k+1} + 1, a_{k+1} = \dfrac{1}{2}a_k + 1$ なので

$$\begin{aligned} a_{k+2} - a_{k+1} &= \left(\frac{1}{2}a_{k+1} + 1\right) - \left(\frac{1}{2}a_k + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_{k+1} - a_k\right) \end{aligned}$$

となる。$a_{k+1} - a_k \geqq 0$ なので $a_{k+2} - a_{k+1} \geqq 0$ が成立する。$n = k + 1$ のときも命題が成立しているので，数学的帰納法により示された。
(2)　$a_1 = 0 \leqq 2$ なので $n = 1$ のとき成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する，即ち $a_k \leqq 2$ の成立を仮定する。このとき

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k + 1 \leqq \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$$

なので $n = k + 1$ のときも成立する。

演習問題 1.4　数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 0, a_{n+1} = 2a_n - 1$ で帰納的に定義される数列とするとき，$a_n = 1 - 2^{n-1}$ が成立することを示せ。

$$1-2^{1-1}=1-2^0=1-1=0=a_1$$

なので $n=1$ のとき $a_n=1-2^{n-1}$ は成立している。

$n=k$ のとき成立を仮定する，即ち $a_k=1-2^{k-1}$ の成立を仮定する。

$$a_{k+1}=2a_k-1=2\left(1-2^{k-1}\right)-1=1-2^k=1-2^{(k+1)-1}$$

となるので $n=k+1$ のときも成立している。

演習問題 1.5　数列 $\{a_n\}$ が下に**有界**とは「$\exists\alpha\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ a_n\geqq\alpha$」と定義し，$\{a_n\}$ が**単調減少数列**であるとは「$\forall n\in\mathbb{N}\ \ a_{n+1}\leqq a_n$」と定義する。定理 1.3 を用いて「下に有界な単調減少数列は収束する」ことを証明せよ。

$b_n=-a_n$ とおく。$\{b_n\}$ が上に有界な単調増加数列であることを示す。a_n は下に有界なので「$\exists N\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ a_n\geqq N$」が成立する。このとき $M=-N$ とおくと任意の自然数 n に対し

$$b_n=-a_n\leqq -N=M$$

となり b_n は上に有界である。また a_n は単調減少数列なので任意の自然数 n に対し

$$a_{n+1}\leqq a_n$$

が成立している。このとき

$$b_{n+1}=-a_{n+1}\geqq -a_n=b_n$$

となるので，b_n は単調増加数列である。定理 1.3 より b_n は収束する。よって a_n も収束する。

演習問題 ****1.6**　定理 1.5 を証明せよ。

$\lim_{x\to a}f(x)=a$ の定義は

$$\forall\varepsilon(>0)\in\mathbb{R}\ \exists\delta(>0)\in\mathbb{R}\ \forall x\ \ 0<|x-a|<\delta\implies|f(x)-A|<\varepsilon$$

が成立することである。

以下 $\lim_{x\to a}f(x)=A,\lim_{x\to a}f(x)=B$ とする。

(1)　1) $\varepsilon>0$ を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して，任意の x に対し

$$0<|x-a|<\delta_1\implies|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して，任意の x に対し

$$0<|x-a|<\delta_2\implies|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。このとき $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とおく。$0<|x-a|<\delta$ のとき

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)-(A+B)|&=|(f(x)-A)+(g(x)-B)|\\&\leqq|f(x)-A|+|g(x)-B|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

となる。
2) $k=0$ の場合は $kf(x)$ は恒等的に 0 なので成立している。よって $k \neq 0$ とする。任意の正数 ε に対して上の様な δ が存在するので，特に $\dfrac{\varepsilon}{|k|}$ に対し $\delta > 0$ が存在して $0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x)-A| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$ を満たす。このとき

$$|kf(x)-kA| = |k(f(x)-A)| = |k| \cdot |f(x)-A| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

となるので証明された。
3) 1 に対しある正数 δ_0 が存在し，任意の x に対し

$$0 < |x-a| < \delta_0 \implies |f(x)-A| < 1$$

が成立している。このとき $M = \max\{\,|A+1|, |A-1|\,\}$ とおくと $0 < |x-a| < \delta_0$ のとき $|f(x)| \leqq M$ が成立する。

最初に $B=0$ の場合を考える。ε を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して任意の x に対し $0 < |x-a| < \delta_1 \implies |g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ が成立する。$\delta = \min\{\,\delta_0, \delta_1\,\}$ とおくと，任意の x に対し $0 < |x-a| < \delta$ のとき

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-AB| &= |f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \\ &< M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\end{aligned}$$

が成立する。この場合は証明された。

よって $B \neq 0$ とする。ε を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して任意の x に対し

$$0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して任意の x に対し

$$0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

が成立する。$\delta = \min\{\,\delta_0, \delta_1, \delta_1\,\}$ とおく。$0 < |x-a| < \delta$ となる x に対し

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-AB| &= |f(x)g(x) - f(x)B + f(x)B - AB| \\ &\leqq |f(x)g(x) - f(x)B| + |f(x)B - AB| \\ &= |f(x)| \cdot |g(x)-B| + |f(x)-A| \cdot |B| \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|B|}|B| = \varepsilon\end{aligned}$$

となり，この場合も成立する。
4) 数列のときと同様に $B \neq 0$ のとき

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$$

を示せば，3) と組み合わせて 4) が証明される。

ε として $\dfrac{|B|}{2}$ をとると，正数 δ_1 が存在して，$0 < |x-a| < \delta_1$ のとき，

$$|g(x)-B| < \frac{|B|}{2}$$

が成立する。このとき $|g(x)| > \dfrac{|B|}{2}$ が成立する。

任意の ε に対して，$g(x)$ は B に収束するので，ある正数 δ_2 が存在して，$0 < |x-a| < \delta_2$ となる任意の x に対し

$$|g(x)-B| < \frac{|B|^2}{2}\varepsilon$$

が成立する。このとき $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと $0 < |x-a| < \delta$ となる任意の x に対し

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| &= \left|\frac{B-g(x)}{g(x)B}\right| = \frac{|B-g(x)|}{|g(x)|\cdot|B|} \\ &< \frac{2|B-g(x)|}{|B|^2} < \varepsilon\end{aligned}$$

が成立する。

(2)　結論が成立しないと仮定すると，$A > B$ が成立している。$\varepsilon = \dfrac{A-B}{2}$ とおくと $\varepsilon > 0$ なので $\delta_1 > 0$ が存在して

$$0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x)-A| < \varepsilon$$

が成立する。結論の式は

$$\begin{aligned}|f(x)-A| < \varepsilon &\implies -\varepsilon < f(x)-A < \varepsilon \\ &\implies A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon \\ &\implies A-\frac{A-B}{2} < f(x) < A+\frac{A-B}{2} \\ &\implies \frac{A+B}{2} < f(x) < A+\frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

と変形できる。このとき $\dfrac{A+B}{2} < f(x)$ が成立している。

また $\delta_2 > 0$ が存在して

$$0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x)-B| < \varepsilon$$

が成立する。結論の式は

$$\begin{aligned}|g(x)-B| < \varepsilon &\implies -\varepsilon < g(x)-B < \varepsilon \\ &\implies B-\varepsilon < g(x) < B+\varepsilon \\ &\implies B-\frac{A-B}{2} < g(x) < B+\frac{A-B}{2} \\ &\implies B-\frac{A-B}{2} < g(x) < \frac{A+B}{2}\end{aligned}$$

と変形できる。このとき $g(x) < \dfrac{A+B}{2}$ が成立している。$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと $0 < |x-a| < \delta$ となる x に対し

$$g(x) < \frac{a+B}{2} < f(x)$$

が成立する。これは矛盾，よって結論が正しいことが示される。

(3)　任意の正数 ε に対し，ある δ_1 が存在して

$$0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して

$$0 < |x-a| < \delta_2 \implies |h(x) - A| < \varepsilon$$

が成立する。$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと x が $0 < |x-a| < \delta$ を満たすとき

$$A - \varepsilon < f(x) \leqq g(x) \leqq h(x) < A + \varepsilon$$

が成立するので $|g(x) - A| < \varepsilon$ が成立する。よって $\lim_{x \to a} g(x) = A$ である。