解析学I問題解説 #3

河野

演習問題 ****1.7**　定理 1.9，1.10，1.11 を証明せよ。

最初に最大値定理 (定理 1.9) を証明する。そのために「閉区間で定義された連続関数は上に有界である。」ことを証明する。

区間 I で定義された関数 f が上に有界であるとは「$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in I \quad f(x) \leq M$」を満たすことである。関数 f は閉区間 $I = [\,a,\, b\,]$ で連続とする。結論を否定し，f は I で有界ではないとする。このとき

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in I \qquad f(x) > M$$

が成立する。特に M として自然数 n をとると，n に対しある実数 $x_n \in I$ が存在して $f(x_n) > n$ が成立する。

次に「数列 $\{\, x_n \,\}$ の部分列 $\left\{\, x_{\alpha(n)} \,\right\}$ で収束するものが存在する」ことを示す。ここで α は自然数 $\mathbb{N}$ から自然数 $\mathbb{N}$ への写像で単調増加であるものである。例えば $\alpha(n) = 2n$ の場合 $\left\{\, x_{\alpha(n)} \,\right\}$ は偶数番目のみから作られる部分列となる。

$\alpha(1) = 1$ と定義する。$a_1 = a, b_1 = b$ とする。$c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ と置く。$I_1 = [\,a_1,\, c_1\,]$ と $J_1 = [\,c_1,\, b_1\,]$ のどちらかは $x_n\ (n \geq 1)$ を無限個含んでいる。I_1 が無限個含んでいるときは $a_2 = a_1, b_2 = c_1$ と置く。J_1 が無限個含んでいるときは $a_2 = c_1, b_2 = b_1$ と置く。$[\,a_2,\, b_2\,]$ に含まれる x_n で $n > \alpha(1)$ となるものを 1 つ選びその番号を $\alpha(2)$ とする。

$c_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$ と置く。$I_2 = [\,a_2,\, c_2\,]$ と $J_2 = [\,c_2,\, b_2\,]$ のどちらかは $x_n\ (n \geq \alpha(2))$ を無限個含んでいる。I_2 が無限個含んでいるときは $a_3 = a_2, b_3 = c_2$ と置く。J_2 が無限個含んでいるときは $a_3 = c_2, b_3 = b_2$ と置く。$[\,a_3,\, b_3\,]$ に含まれる x_n で $n > \alpha(2)$ となるものを 1 つ選びその番号を $\alpha(3)$ とする。

k 番めまで $a_k, b_k, \alpha(k)$ が選ばれているとする。$c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ と置く。$I_k = [\,a_k,\, c_k\,]$ と $J_k = [\,c_k,\, b_k\,]$ のどちらかは $x_n\ (n \geq \alpha(k))$ を無限個含んでいる。I_k が無限個含んでいるときは $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = c_k$ と置く。J_k が無限個含んでいるときは $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k$ と置く。$[\,a_{k+1},\, b_{k+1}\,]$ に含まれる x_n で $n > \alpha(k)$ となるものを 1 つ選びその番号を $\alpha(k+1)$ とする。

このことを繰り返すと数列 $\{\, a_n \,\}, \{\, b_n \,\}$ 及び部分列 $\left\{\, x_{\alpha(n)} \,\right\}$ が定まる。作り方から a_n は上に有界な単調増加数列であり，b_n は下に有界な単調減少数列であり，任意の自然数 n に対し

$$a_n \leq x_{\alpha(n)} \leq b_n$$

が成立する。定理 1.3 (上に有界な単調増加数列は収束する) および演習問題 1.5 より a_n および b_n は収束する。$b_n - a_n = (b - a)\dfrac{1}{2^{n-1}}$ より a_n と b_n は同じ値 A に収束する。はさみうちの定理 (定理 1.2 (3)) より $x_{\alpha(n)}$ の同じ値 A に収束する。即ち

$$\lim_{n \to \infty} x_{\alpha(n)} = A$$

$a \leq a_n \leq x_{\alpha(n)} \leq b_n \leq b$ より $a \leq A \leq b$，即ち $A \in I$ である。f は連続なので

$$\lim_{n \to \infty} f(x_{\alpha(n)}) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_{\alpha(n)}\right) = f(A)$$

となるが，一方

$$f(x_{\alpha(n)}) > \alpha(n) \geq n$$

なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_{\alpha(n)}) = \infty$ となる。これは矛盾，よって f は有界である。

定理 1.9 の証明に入ろう。定理が成立しないとする。即ち関数 f に最大値が存在しないと仮定する。$X = \{\, f(x) \mid x \in I \,\}$ は上に有界であるので X の最小上界 (上限) $\sup X$ が存在する。これを M とする。$f(x) = M$ となる $x \in I$ が存在すればそれは最大値である。よって $f(x) = M$ となる x は I に存在しない。

もし「$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I\ \ f(x) \leq M - \dfrac{1}{n}$」が成立すると $M - \dfrac{1}{n}$ が上界になり，M が最小上界ということに反する。よってこの否定，即ち

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in I\ \ f(x) > M - \frac{1}{n}$$

が成立する。この性質をもつ x を x_n とすると，$f(x_n) > M - \dfrac{1}{n}$，即ち

$$\frac{1}{M - f(x_n)} > n$$

が成立する。

$g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ とおくと，分母が 0 にならないので $g(x)$ は連続関数である。すでに示したことから $g(x)$ は有界である。しかし任意の自然数 n に対し

$$g(x_n) = \frac{1}{M - f(x_n)} > n$$

となる x_n が存在するので有界ではない。これは矛盾なので最大値が存在する。

次に定理 1.10 を証明する。$I = [\, a, b\,]$，$X = \{x \in I \mid f(x) \leq \alpha\}$ と定義する。X は上に有界なので最小上界 $\sup X$ が存在する。これを c とする。

(1) $f(c) \leq \alpha$ が成立する。これを背理法で示す。結論が成立しないとすると，$f(c) > \alpha$ である。$\varepsilon = f(c) - \alpha$ とすると $\varepsilon > 0$ よりある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

が成立する。このとき $-\varepsilon < f(x) - f(c)$ なので，$-(f(c) - \alpha) < f(x) - f(c)$ より $\alpha < f(x)$ が成立する。$\sup X$ より小さい実数は X の上界ではないので $c - \delta$ は X の上界ではない。即ち

$$\exists t \in X\ \ c - \delta < t \leq c$$

が成立する。$t \in X$ より $f(t) \leq \alpha$ である。一方 $|t - c| < \delta$ なので $\alpha < f(t)$ が成立する。これは矛盾，よって (1) が成立する。

(2) $f(c) \geq \alpha$ が成立する。これを背理法で示す。結論が成立しないとすると，$f(c) < \alpha$ である。$\varepsilon = \alpha - f(c)$ とおくと $\varepsilon > 0$ よりある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

が成立する。このとき $f(x) - f(c) < \varepsilon$ なので，$f(x) - f(c) < \alpha - f(c)$ より $f(x) < \alpha$ が成立する。$t = c + \dfrac{\delta}{2}$ とするとき，$|t - c| < \delta$ なので $f(t) < \alpha$ が成立する。よって $t \in X$ となる。これは c が X の上界ということに反する。よって (2) が成立する。以上により $f(c) = \alpha$ が示される。

最後に定理 1.11 を証明する。単調減少関数に関しても同様に示すことができるので (演習問題 1.8 参照)，単調増加関数に関して証明する。

$R = (\,-\infty,\,\infty\,)$ と考えると定義域は $a = -\infty$，$b = \infty$ の場合も含めて $I = [\,a,\,b\,)\,,(\,a,\,b\,]\,,(\,a,\,b\,)\,,[\,a,\,b\,]$ のいずれかの形をしている。

b が実数で $b \in I$ のとき $d = f(b)$ とおき，b が実数で $b \notin I$ のとき $d = \displaystyle\lim_{x\to b-0} f(x)$ とおき，$b = \infty$ のとき $d = \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ とおく。c が実数で $c \in I$ のとき $c = f(a)$ とおき，c が実数で $c \notin I$ のとき $c = \displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ とおき，$c = -\infty$ のとき $c = \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ とおく。

f を閉区間 $I = [\,a,\,b\,]$ で定義された単調増加で連続な関数とする。$I = [\,a,\,b\,)\,,(\,a,\,b\,]\,,(\,a,\,b\,)\,,[\,a,\,b\,]$ のそれぞれの場合 $J = [\,c,\,d\,)\,,(\,c,\,d\,]\,,(\,c,\,d\,)\,,[\,c,\,d\,]$ とおく。このとき $f : I \longrightarrow J$ が全単射であることを示す。単調増加関数が単射であることはすでに示しているので，全射であることを示す。

α を J の任意の元とする。$\alpha = c$ のときは $a \in I$ に対し $f(a) = c = \alpha$ となる。$\alpha = d$ のときは $b \in I$ に対し $f(b) = d = \alpha$ となるので成立している。よって $\alpha \neq c$ かつ $\alpha \neq d$ とすると $c < \alpha < d$ である。中間値の定理より $e \in I$ が存在して $f(e) = \alpha$ となる。よって f は全射である。

よって逆関数 $f^{-1} : J \longrightarrow I$ が存在する。f^{-1} も単調増加であることを示す。$y_1, y_2 \in J$ が $y_1 < y_2$ を満たすとする。$x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$ とおくと $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ となる。x_1 と x_2 は (1) $x_1 > x_2$，または (2) $x_1 = x_2$，または (3) $x_1 < x_2$ のいずれかが成立している。(1) のとき $x_1 > x_2$ と f が単調増加であることから

$$y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$$

となる。これは矛盾。(2) のとき

$$y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$$

となり，これも矛盾。よって (3) が起こっている。よって

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$$

となるので f^{-1} は単調増加である。

f^{-1} が連続であることを示す。$\alpha \in J$ とする。$\alpha \neq c$ かつ $\alpha \neq d$ の場合を考える。$f^{-1}(\alpha) = e$ とおくと $f(e) = \alpha$ である。ε を任意の正の実数とする。$x_1 = \max\{\,e - \varepsilon, a\}$，$x_2 = \min\{\,e + \varepsilon, b\}$ とおくと，$x_1 < e < x_2$ が成立している。このとき $f(x_1) < f(e) < f(x_2)$ が成立する。$y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ とおくと $y_1 < \alpha < y_2$ が成立する。$\delta = \min\{\,y_2 - \alpha, \alpha - y_1\,\}$ とおく。$|y - \alpha| < \delta$ となる任意の $y \in J$ に対し

$$y_1 - \alpha = -(\alpha - y_1) \leq -\delta < y - \alpha < \delta \leq y_2 - \alpha$$

が成立するので $y_1 < y < y_2$ が成立する。よって

$$x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2$$

が成立する。

$$-\varepsilon \leq x_1 - e < f^{-1}(y) - f^{-1}(\alpha) < x_2 - e \leq \varepsilon$$

より $|f^{-1}(y) - f^{-1}(\alpha)| < \varepsilon$ となるので α において連続である。

$\alpha = c$ のとき $\alpha \in J$ より $\alpha = f(a)$ $(a \in I)$ となっている。ε を任意の正の実数とする。$x_2 = \min\{\, a+\varepsilon, b \,\}$ と置くと $a < x_2$ が成立している。このとき $f(a) < f(x_2)$ が成立する。$y_2 = f(x_2)$ と置くと $\alpha < y_2$ が成立する。$\delta = y_2 - \alpha$ とおくと $0 \leq y - \alpha < \delta$ となる任意の $y \in J$ に対し

$$f^{-1}(\alpha) \leq f^{-1}(y) < f^{-1}(\delta + \alpha) = x_2$$

が成立する。よって

$$0 \leq f^{-1}(y) - f^{-1}(\alpha) < x_2 - a \leq \varepsilon$$

が成立する。よって f^{-1} は $f(a)$ で連続である。

$\alpha = d$ のとき $\alpha \in J$ より $\alpha = f(b)$ $(b \in I)$ となっている。ε を任意の正の実数とする。$x_1 = \max\{\, b-\varepsilon, a \,\}$ と置くと $x_1 < b$ が成立している。このとき $f(x_1) < f(b)$ が成立する。$y_1 = f(x_1)$ と置くと $y_1 < \alpha$ が成立する。$\delta = \alpha - y_1$ とおくと $-\delta \leq y - \alpha \leq 0$ となる任意の $y \in J$ に対し

$$x_1 = f^{-1}(\alpha - \delta) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(\alpha)$$

が成立する。よって

$$-\varepsilon \leq x_1 - b \leq f^{-1}(y) - f^{-1}(\alpha) \leq 0$$

が成立する。よって f^{-1} は $f(b)$ で連続である。

演習問題 1.8　定理 1.10 の成立を前提として次を証明せよ。

閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f が $f(a) > f(b)$ を満たしているとする。$f(a) > \alpha > f(b)$ となる任意の α に対しある c $(a < c < b)$ が存在して $f(c) = \alpha$ となる。

$g(x) = -f(x)$ とおくと，$g(x)$ は $[\, a,\, b \,]$ で定義された連続関数であり $g(a) < g(b)$ となっている。α を $f(a) > \alpha > f(b)$ を満たす任意の実数とする。$\beta = -\alpha$ とし，この $g(x)$，β に定理 1.10 を適用すると，$a < c < b$ を満たす c で $g(c) = \beta$ となるものが存在する。

$$g(a) < g(c) = \beta < g(b)$$

より

$$-f(a) < -f(c) = -\alpha < -f(b)$$

であるが，3 辺に -1 をかけると

$$f(a) > f(c) = \alpha > f(b)$$

が得られる。

演習問題 1.9　微分可能な関数は連続であることを示せ。また連続であるが微分可能でない関数の例をあげよ。

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能のとき $\varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$ と置くと $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ となる。よって

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} (f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h) = f(a)$$

となるので f は $x=a$ で連続である。

$y=f(x)=|x|$ (絶対値) とする。$\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ なので f は $x=0$ で連続である。

しかし

$$f'_{+}(0)=\lim_{h\to +0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h}{h}=1$$

であり,

$$f'_{-}(0)=\lim_{h\to -0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h}{h}=-1$$

なので $x=0$ で微分可能ではない。

演習問題 1.10　$y=f(x)=f(a+h)$ を a のまわりで一番よく近似する h の 3 次式を求めよ。ここで近似の一番よい 3 次式 $g(h)=A+Bh+Ch^2+Dh^3$ とは $d(h)=f(a+h)-g(h)$ に対し $\varepsilon(h)=\dfrac{d(h)}{h^3}$ とおくとき $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立するものをいう。関数は何回でも微分できることを仮定する。

3 次式 $g(h)=A+Bh+Ch^2+Dh^3$ に対し

$$d(h)=f(a+h)-g(h)$$
$$\varepsilon(h)=\frac{d(h)}{h^3}$$

とおくとき $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立している。$d(h)=\varepsilon(h)h^3$ なので $\lim_{h\to 0}d(h)=0$ となる。よって

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}d(h)\\&=\lim_{h\to 0}\Big(f(a+h)-(A+Bh+Ch^2+Dh^3)\Big)\\&=\lim_{h\to 0}f(a+h)-\lim_{h\to 0}(A+Bh+Ch^2+Dh^3)=f(a)-A\end{aligned}$$

となるので $A=f(a)$ である。

$\lim_{h\to 0}\dfrac{d(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h^2=0$ なので

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-\big(f(a)+Bh+Ch^2+Dh^3\big)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0}\big(B+Ch+Dh^2\big)\\&=f'(a)-B\end{aligned}$$

となるので $B=f'(a)$ である。

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h=0$ なので

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-\bigl(f(a)+f'(a)h+Ch^2+Dh^3\bigr)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)-2Ch-3Dh^2}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)-2C-6Dh}{2} \\
&= \frac{f''(a)-2C}{2}
\end{aligned}
$$

となるので $C=\dfrac{f''(a)}{2}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^3}=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ なので

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^3} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-\bigl(f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+Dh^3\bigr)}{h^3} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)-f''(a)h-3Dh^2}{3h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)-f''(a)-6Dh}{6h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f'''(a+h)-6D}{6} \\
&= \frac{f'''(a)-6D}{6}
\end{aligned}
$$

となるので $D=\dfrac{f'''(a)}{6}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

以上により最も近似のよい 3 次式は

$$
f(x)=f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\frac{f'''(a)}{6}h^3
$$

である。

演習問題 1.11　次の関数 $y=f(x)$ を a のまわりで一番良く近似する 1 次式，2 次式，3 次式を求めよ。

(1) $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\quad(a=0)$　　(2) $f(x)=e^x\quad(a=1)$

(3) $f(x)=(x+1)^5\quad(a=0)$

ここでは演習問題 1.10 の成立を仮定した解答とする。最後に演習問題 1.10 の結果を使わない解答を (2) についてのみ述べる。 a のまわりで $f(x)$ を一番良く近似する 1 次式，2 次式，3 次式をそれぞれ $g_1(h), g_2(h), g_3(h)$ とする。

(1) $f'(x) = -\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, $f''(x) = -\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, $f^{(3)}(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, $f^{(4)}(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ なので $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f''(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f^{(3)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f^{(4)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。演習問題 1.10 より $x=0$ で $f(x)$ を一番良く近似する 1 次式，2 次式，3 次式はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
g_1(h) &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h \\
g_2(h) &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h - \frac{1}{2\sqrt{2}}h^2 \\
g_3(h) &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h - \frac{1}{2\sqrt{2}}h^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}h^3
\end{aligned}
$$

である。

(2) $f'(x) = e^x$ より任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(x) = e^x$ である。$f(1) = f'(1) = f^{(2)}(1) = f^{(3)}(1) = f^{(4)}(1) = e$ なので

$$
\begin{aligned}
g_1(h) &= e + eh \\
g_2(h) &= e + eh + \frac{e}{2}h^2 \\
g_3(h) &= e + eh + \frac{e}{2}h^2 + \frac{e}{6}h^3
\end{aligned}
$$

である。

(3) $f'(x) = 5(x+1)^4$, $f''(x) = 20(x+1)^3$, $f^{(3)}(x) = 60(x+1)^2$, $f^{(4)}(x) = 120(x+1)^1$ より $f(0) = 1$, $f'(0) = 5$, $f''(0) = 20$, $f^{(3)}(0) = 60$, $f^{(4)}(0) = 120$ となる。よって

$$
\begin{aligned}
g_1(h) &= 1 + 5h \\
g_2(h) &= 1 + 5h + 10h^2 \\
g_3(h) &= 1 + 5h + 10h^2 + 10h^3
\end{aligned}
$$

である。

(3) に関連して $f(x)$ が多項式の場合の近似式について述べておく。$f(x)$ が多項式の場合 a のまわりで近似することは $f(x)$ を $(x-a)$ について展開しなおすことになる。例えば $f(x) = x^3+x^2+x+1$ を $x=1$ で近似することを考える。$x-1$ で展開するので $f(x)$ を $x-1$ で割ると

$$f(x) = (x-1)(x^2+2x+3)+4$$

となる。x^2+2x+3 を $x-1$ で割ると

$$x^2+2x+3 = (x-1)(x+3)+6$$

となる。$x+3$ を $x-1$ で割ると

$$x+3 = (x-1)+4$$

となる。この結果を代入していくと

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 4 + (x-1)(x^2+2x+3) \\
&= 4 + (x-1)\left((x+3)(x-1)+6\right) \\
&= 4 + 6(x-1) + (x-1)^2(x+3) \\
&= 4 + 6(x-1) + (x-1)^2(x-1+4) \\
&= 4 + 6(x-1) + 4(x-1)^2 + (x-1)^3
\end{aligned}
$$

を得る。一般に多項式の $x-a$ における近似はこの方法でも得られる。

演習問題 1.10 の結果を使用しない解答を (2) の 3 次式の場合のみ述べる。やり方を見れば分かるように，演習問題 1.10 の結果を使用しない場合，演習問題 1.10 で議論したことをもう一度議論し直すことになる。

求める 3 次式を $g(h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3$ とする。

$$
\begin{aligned}
d(h) &= f(1+h) - g(h) = e^{1+h} - g(h) \\
\varepsilon(h) &= \frac{d(h)}{h^3}
\end{aligned}
$$

と置くと $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立している。$\lim_{h\to 0} d(h) = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h)h^3 = 0$ なので $d(0) = e^{1-0} - g(0) = e - A$ より $A = e$ を得る。

$\lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h)h^2 = 0$ なので

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{1+h} - (e + Bh + Ch^2 + Dh^3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{1+h} - e}{h} - \lim_{h\to 0}(B + Ch + Dh^2) \\
&= f'(0) - B = e - B
\end{aligned}
$$

より $B = e$ を得る。

$\lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h)h = 0$ なので

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h^2} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{1+h} - (e + eh + Ch^2 + Dh^3)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^{1+h}\right)' - (e + 2Ch + 3Dh^2)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^{1+h}\right)'' - (2C + 6Dh)}{2} \\
&= \frac{e - 2C}{2}
\end{aligned}
$$

より $C = \frac{e}{2}$ を得る。

$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ なので

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{1+h} - (e + eh + \frac{e}{2}h^2 + Dh^3)}{h^3} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^{1+h}\right)' - (e + eh + 3Dh^2)}{3h^2} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^{1+h}\right)'' - (e + 6Dh)}{6h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^{1+h}\right)''' - 6D}{6} \\ &= \frac{e - 6D}{6}\end{aligned}$$

より $D = \dfrac{e}{6}$ を得る。以上により

$$g(h) = e + eh + \frac{e}{2}h^2 + \frac{e}{6}h^3$$

を得る。

演習問題 1.12　定理の証明の最後の部分 (最小値 c が $a < c < b$ に存在するとき $f'(c) = 0$ となる) を証明せよ。

最小値を与える c が $a < c < b$ を満たしているとする。任意の h に対し $c + h$ が区間 $[\,a, b\,]$ に入っていれば $f(c+h) \geq f(c)$ が成立する。$h > 0$ のとき $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$ なので

$$f'(c) = f'_{+}(c) = \lim_{h\to +0}\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

が成立する。また $h < 0$ のとき $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$ なので

$$f'(c) = f'_{-}(c) = \lim_{h\to -0}\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

が成立する。$0 \leq f'(c) \leq 0$ より $f'(c) = 0$ である。

演習問題 1.13　平均値の定理から系 1.20, 1.21,1.22 を導け。

最初に系 1.20 を示す。区間内の任意の x_1, x_2 について，$x_1 < x_2$ とすると平均値の定理よりある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。(1) の条件より $f'(c) = 0$ なので $f(x_2) - f(x_1) = 0$ 即ち任意の x_1, x_2 に対し $f(x_2) = f(x_1)$ が成立する。これは f が定数関数である事を示している。よって (1) が示された。

(2) は $h(x) = f(x) - g(x)$ とおき，$h(x)$ に (1) を適用する。$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ より区間 I において $h'(x) = 0$ なので $h(x)$ は定数関数である。これを C とすると，$f(x) = g(x) + h(x) = g(x) + C$ となる。

次に系 1.21 を示す。区間内の任意の x_1, x_2 について，$x_1 < x_2$ とすると平均値の定理よりある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。(1) の条件より $f'(c) > 0$

かつ $x_2 - x_1 > 0$ なので $f(x_2) - f(x_1) > 0$ である。即ち任意の x_1, x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成立する。これは f が単調増加関数である事を示している。よって (1) が示された。

(2) は，$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。このとき $f'(c) < 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) < 0$ である。即ち任意の x_1, x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ となる。よって f は単調減少関数である。

最後に系 1.22 を示す。$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

と書ける。このとき (1) の条件より $f'(c) \geq 0$ となっている。また $x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ 即ち $f(x_1) \leq f(x_2)$ となる。よって f は単調非減少である。よって (1) が示された。

$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。このとき (2) の条件より $f'(c) \leq 0$ となっている。$x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ 即ち $f(x_1) \geq f(x_2)$ となる。よって f は単調非増加である。

演習問題 ***1.14**　定理 1.18 を用いてロピタルの定理を証明せよ。ロピタルの定理とは以下の内容の定理である。

f, g は a の周りで微分可能とする。$f(a) = g(a) = 0$ あるいは，$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ となるとき，$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して，両者の値は一致する。ここで a は $\pm\infty$ でもよい。

最初に $f(a) = g(a) = 0$ の場合を証明する。$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ および $\lim_{x \to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ を証明すれば $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が証明される。

$x > a$ の場合を考える。$f(a) = g(a) = 0$ なので

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

が成立している。このとき定理 1.18 より $a < c < x$ となる c で

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

となるものが存在する。$x \to a + 0$ とすると $c \to a + 0$ となるので

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立する。$x < a$ の場合も同様なので省略する。

次に $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ の場合を考える。$F(x) = \frac{1}{f(x)}$ $(x \neq a)$，$F(a) = 0$，$G(x) = \frac{1}{g(x)}$ $(x \neq a)$，$G(a) = 0$，とおくと F および G は $x = a$ で連続である。F, G に今証明

したロピタルの定理の $f(a)=g(a)=0$ の場合を適用すると

$$\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$$

が成立する。ここで $f(x)F(x)=1$ より $f'(x)F(x)+f(x)F'(x)=0$ 即ち $F'(x)=-\dfrac{f'(x)F(x)}{f(x)}$ が成立する。同様に $G'(x)=-\dfrac{g'(x)G(x)}{g(x)}$ が成立する。上式に代入すると

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\frac{g(x)}{f(x)}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$$

が成立する。これを整理する

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

が得られる。ただし途中 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}$ の収束を仮定した。