解析学 I 問題解説 #12

河野

演習問題 3.8　次の条件の下で微分方程式を立てよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点を P とする。P における法線が x 軸と交わる点を N，P から x 軸へ下ろした垂線の足を Q とすると線分 QN の長さが常に一定である。

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点を P とする。P における接線が x 軸と交わる点を S，y 軸と交わる点を T とすると点 P は線分 ST の中点である。

(3) 空気中を落下する物体に働く空気の抵抗は速度の 2 乗に比例する。比例定数を k，重力定数を g とする。速度を v とするとき v が満たすべき微分方程式を求めよ。

(1)　点 $P(x, y)$ における接線の方程式は $Y = y'(X - x) + y$ なので，法線の方程式は

$$Y = -\frac{1}{y'}(X - x) + y$$

である。N は法線上の点なので座標を $(x_0, 0)$ とすると，$0 = -\dfrac{1}{y'}(x_0 - x) + y$ が成立する。今 $x_0 - x$ が一定なのでこれを C(定数) とおくと微分方程式

$$y'y = C$$

を得る。

(2)　接線の方程式は (1) と同様で

$$Y = y'(X - x) + y$$

である。T の座標は $(0, 2y)$ なので $2y = y'(0 - x) + y$ が成立する。よって満たすべき微分方程式は

$$y'x + y = 0$$

である。

(3)　運動方程式は力を F 加速度を a 質量を m としたとき

$$F = ma$$

であった。下向きを正の方向にとると働く力は重力と空気の抵抗力なので，$F = mg - kv^2$ となる。よって求める微分方程式は

$$mg - kv^2 = mv'$$

である。

演習問題 3.9　次の微分方程式を解け。

(1) $yy' + x = 0$

(2) 演習問題 3.8 (1) で得られた微分方程式

(3) 演習問題 3.8 (2) で得られた微分方程式

(4) 演習問題 3.8 (3) で得られた微分方程式

ここは変数分離型で解く。

(1) $y\dfrac{dy}{dx}+x=0$ なので，$ydy=-xdx$ となる。両辺を積分して，$\displaystyle\int ydy=-\int xdx$ より $\dfrac{1}{2}y^2=-\dfrac{1}{2}x^2+C$ を得る。よって

$$x^2+y^2=2C$$

を得る。$C<0$ のとき式を満たす (x,y) は存在しない。また $C=0$ のときは $(x,y)=(0,0)$ のみが式を満たす。$C>0$ のとき $r=\sqrt{2C}$ とおくと式は $x^2+y^2=r^2$ となる。よって求める曲線は原点中心半径 r の円である。

(2) $y\dfrac{dy}{dx}=C$ より $ydy=Cdx$ を積分して，$\dfrac{1}{2}y^2=Cx+C_1$ となる。よって

$$y=\pm\sqrt{2Cx+2C_1}$$

を得る。

(3) $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ より $\dfrac{1}{y}dy=-\dfrac{1}{x}dx$ を積分して，$\log|y|=-\log|x|+C_1$ となる。

$$|y|=e^{\log|y|}=e^{-\log|x|+C_1}=e^{-\log|x|}e^{C_1}=\frac{e^{C_1}}{e^{\log|x|}}=\frac{e^{C_1}}{|x|}$$

より $y=\pm\dfrac{e^{C_1}}{x}$ となる。$C=\pm e^{C_1}$ とおくと，

$$y=\frac{C}{x}$$

を得る。

(4) $mg-kv^2=m\dfrac{dv}{dt}$ より $\dfrac{1}{g-\dfrac{k}{m}v^2}dv=dt$ となり，

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{\dfrac{k}{m}}v}+\frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{\dfrac{k}{m}}v}\right)dv=dt$$

と変形して積分すると，

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\sqrt{\frac{m}{k}}\log\left(\sqrt{g}+\sqrt{\frac{k}{m}}v\right)-\sqrt{\frac{m}{k}}\log\left|\sqrt{g}-\sqrt{\frac{k}{m}}v\right|\right)=t+C_1$$

を得る。初期値を $v=0$ と考えると $\sqrt{g}-\sqrt{\dfrac{k}{m}}v>0$ と仮定できるので，絶対値をはずして変形すると，

$$\log\left(\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\dfrac{k}{m}}v}{\sqrt{g}-\sqrt{\dfrac{k}{m}}v}\right)=2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{m}}(t+C_1)$$

となるので，

$$\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\dfrac{k}{m}}v}{\sqrt{g}-\sqrt{\dfrac{k}{m}}v}=\exp\left(2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{m}}(t+C_1)\right)$$

となる。よって

$$v = \sqrt{g}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\exp\left(2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{m}}(t+C_1)\right)-1}{\exp\left(2\sqrt{g}\sqrt{\frac{k}{m}}(t+C_1)\right)+1}$$

を得る。$t \to \infty$ としたとき $v \to \sqrt{g}\sqrt{\frac{m}{k}}$ となる。よってこの条件下では落下速度は $\sqrt{g}\sqrt{\frac{m}{k}}$ を超えない。