

解析学 I 演習に対する追加説明 #1

- 演習問題 1.3 は極限を求める問題ではない。誤解して違うことを求めようとしている解答がいくつか見られた。
- 問題が何を要求しているか、問題をきちんと読むこと。
- 極限を求めることはすでに要綱でやっている。要綱では定理 1.3 を用いて極限值を求めた。ただし、定理 1.3 適用の前提である、数列が「有界で」「単調増加」なことは前提にした。
- そのこと—有界性と単調増加—を証明するのが演習問題 1.3 の内容である。
- 数列は

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$$

で帰納的に定義されている。即ち a_2, a_3 は漸化式に $n = 1, 2$ を代入して求まる。

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + 1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1$$
$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = \frac{3}{2}$$

a_4 以上も求めようと思えば同様に求めることができる。

- 最初に単調増加であること—任意の自然数に対し $a_{n+1} - a_n \geq 0$ を数学的帰納法により示す。

$n = 1$ のとき

$$a_2 - a_1 = 1 - 0 = 1 \geq 0$$

なので成立している。

$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $a_{k+1} - a_k \geq 0$ の成立を仮定する。

このとき漸化式を用いると

$$a_{k+2} - a_{k+1} = \frac{1}{2}a_{k+1} + 1 - \left(\frac{1}{2}a_k + 1 \right)$$
$$= \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k) \geq 0$$

よって $n = k + 1$ のときも成立している。

- 次に数列が有界であることを数学的帰納法で示す。即ち任意の自然数 n に対し $a_n \leq 2$ であることを示す。
- 証明の途中で使用するので、任意の自然数 n に対し

$$a_n \geq 0$$

であることを注意しておく。

a_n が単調増加数列であることは今示した。 $a_1 = 0$ なので任意の自然数 n に対し $a_n \geq 0$ が成立する。

- $n = 1$ のとき

$$a_1 = 0 \leq 2$$

なので成立している。

$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $a_k \leq 2$ の成立を仮定する。このとき漸化式より

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k + 1 \leq \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$$

となり $n = k + 1$ でも成立する。