解析学 I 演習に対する追加説明#2

- 剰余項の表示で θ を用いるものと c を用いるものがあるが，その関係について再度説明しておく。

- Taylor の定理とは次であった。

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

  を満たす $\theta\,(0<\theta<1)$ が存在する。$R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を**剰余項**と呼ぶ。

- ここで $c = a+\theta(x-a)$ とおくと剰余項は

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

  となる。

- $0<\theta<1$ を c の不等式に直す。

- $a<x$ のとき $x-a>0$ となるので，$x-a$ を $0<\theta<1$ にかけると

$$0<\theta(x-a)<x-a$$

  となる。この式の 3 辺に a を加えると

$$a<a+\theta(x-a)<x-a+a=x$$

  となり

$$a<c<x$$

  が得られる。

  逆に $a<c<x$ が成立しているとき上の議論を逆にたどると $0<\theta<1$ が得られる。

- $a>x$ のとき $x-a<0$ となるので，$x-a$ を $0<\theta<1$ にかけると

$$0>\theta(x-a)>x-a$$

  となる。この式の 3 辺に a を加えると

$$a>a+\theta(x-a)>x-a+a=x$$

となり

$$a > c > x$$

が得られる。

逆に $a > c > x$ が成立しているとき上の議論を逆にたどると $0 < \theta < 1$ が得られる。

- Taylor の定理の表現として θ を用いると，剰余項は複雑になるが条件は

$$0 < \theta < 1$$

と簡単になる。c を用いると，剰余項の表示は θ を用いるものに比べて簡単であるが，条件が

$$a < x \text{ のとき} \quad a < c < x$$
$$a > x \text{ のとき} \quad a > c > x$$

と場合分けが必要になる。

一長一短があるので，状況により使い分ければよい。