

## 解析学 I に対する追加説明 #4

- テーラーの定理は次である。

次を満たす  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) が存在する。

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n$$

$R_n = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n$  であり、これを剰余項と呼ぶ。

- 関数  $f$  が何回でも微分可能で、 $R_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) が成立するとき、テイラーの定理から

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

が得られる。これを  $x = a$  におけるテーラー級数という。

- だから「テーラー級数を求めよ」という問題は、

$$R_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1)$$

を仮定すれば  $n$  次導関数を求める問題である。

- 条件 (1) が成立するとき、 $f$  は  $x = a$  でテーラー級数展開可能というが、我々は通常このことを仮定する。
- 次の問題を考える

$f(x) = (x+2) \log(x+2)$  の  $x = 0$  におけるテーラー級数を求めよ。

- $n$  次導関数  $f^{(n)}(x)$  の形を予想するため何回か微分してみる。

$$f'(x) = \log(x+2) + 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$f^{(3)}(x) = -(x+2)^{-2}$$

$$f^{(4)}(x) = 2(x+2)^{-3}$$

$$f^{(5)}(x) = -6(x+2)^{-4}$$

- $6 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$  に気がつけば  $n \geq 2$  に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (n-2)! (x+2)^{-(n-1)} \quad (2)$$

が予想される。

- 式 (2) を数学的帰納法で証明しよう。

$$f''(x) = \frac{1}{x+2} = (-1)^2 (2-2)! (x+2)^{-(2-1)}$$

なので  $n = 2$  のとき成立している。

- $n = k$  のとき成立することを仮定する。即ち

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k (k-2)! (x+2)^{-(k-1)}$$

の成立を仮定する。与式を  $x$  で微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)}(x))' = ((-1)^k (k-2)! (x+2)^{-(k-1)})' \\ &= (-1)^k (k-2)! (-(k-1)) (x+2)^{-(k-1)-1} \\ &= (-1)^{k+1} (k-1)! (x+2)^{-k} \\ &= (-1)^{k+1} ((k+1)-2)! (x+2)^{-((k+1)-1)} \end{aligned}$$

となり,  $n = k+1$  でも成立している。

- 式 (2) は  $n = 0$  および  $n = 1$  では成立していないことに注意すること。 $n = 0$  のときは

$$f^{(0)}(x) = f(x) = (x+2) \log(x+2)$$

であるから  $f^{(0)}(0) = 2 \log 2$  である。

$n = 1$  のときは

$$f'(x) = \log(x + 2) + 1$$

より  $f'(0) = \log 2 + 1$  である。

$n \geq 2$  のときは

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (n - 2)! (x + 2)^{-(n-1)}$$

より

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n (n - 2)! 2^{-(n-1)}$$

である。

• よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f^{(0)}(0) + f'(0)x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= 2 \log 2 + (\log 2 + 1)x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (k - 2)! 2^{-(k-1)}}{k!} x^k \\ &= \log 2 + (\log 2 + 1)x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k-1} k (k - 1)} x^k \end{aligned}$$

が得られる。