解析学Iに対する追加説明#5

- 級数は得られる場合は一意的 (一通りに決まる) であることが知られている。即ち $x = a$ における級数が 2 つあったとする。それを $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$，$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$ とすると，任意の k に対し $a_k = b_k$ である。

- この事実を用いれば導関数を求めなくても，級数を求められる場合がある。次の問題を考える。

> $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ を $x = 0$ でテーラー展開せよ。ただし $-1 < x < 1$ とする。

- x を $-1 < x < 1$ を満たす実数とする。初項 1 公比 x の等比数列の和を考えると

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

が成立する。ここで $n \to \infty$ とすると $x^n \to 0$ なので

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \tag{1}$$

となる。

- 次に前問を用いて次の問題を考える。

> $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ を $x = 0$ でテーラー展開せよ。ただし $-1 < x < 1$ とする。

式 (1) に $-x$ を代入すると

$$\begin{aligned} g(x) = f(-x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \end{aligned} \tag{2}$$

が得られる

- 次に前問を用いて次の問題を考える。

> $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ を $x = 0$ でテーラー展開せよ。ただし $-1 < x < 1$ とする。

式 (3) に x^2 を代入すると

$$h(x) = g(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} \tag{3}$$

が得られる

- 前問を用いて次の問題を考える。

> $T(x) = \operatorname{Arctan} x$ を $x = 0$ でテーラー展開せよ。ただし $-1 < x < 1$ とする。

$(\operatorname{Arctan} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ より

$$\operatorname{Arctan} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

が成立することを注意しておく。

式 (3) より

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan} x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}\end{aligned}$$