解析学 I に対する追加説明#6

- 2 変数関数の極限値に関して復習する。
- 多項式関数 $z = f(x, y)$ は 1 変数の場合と同様に連続なので

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

  が成立する。

- 演習問題 2.3(1) は分母の極限が 0 でないので商の極限が使用できる。即ち

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y)}$$

  が適用できる。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2 + 2}{x + y - 1} = \frac{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 + y^2 + 2\right)}{\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x + y - 1)} = \frac{2}{-1} = -2$$

- (2) は

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

  であるが，極限は $\dfrac{0}{0}$ の不定型なので，前項の商の極限は適用できない。

- 2 変数の極限の場合極座標に直して計算するのも 1 つの方法である。$(x, y) \to (0, 0)$ のとき $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と極座標表示すると (極座標なので当然 $r \geqq 0$ である)，$(x, y) \to (0, 0)$ のとき $r \to +0$ が成立する。逆に $r \to +0$ のとき $(x, y) \to (0, 0)$ が成立する。ただし θ は方向を表すので，不定であり統制できないことに注意すること。

$$\begin{aligned}\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} &= \frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \\ &= r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\end{aligned}$$

となる。θ はどのような動き方をするか分からないが,

$$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1, \quad -1 \leqq \sin\theta \leqq 1$$

が成立するので,

$$-1 \leqq \cos^3\theta \leqq 1, \quad -1 \leqq \sin^3\theta \leqq 1$$

となる。よって

$$-2 \leqq \cos^3\theta + \sin^3\theta \leqq 2$$

より

$$-2r \leqq r\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) \leqq 2r$$

を得る。はさみうちの定理より

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$$

となる。

- (3) を考える。$(x,y) \to (1,1)$ と $r \to +0$ を同値にするためには $(1,1)$ を中心とする極座標表示，即ち

  $$x-1 = r\cos\theta, \quad y-1 = r\sin\theta$$

  とおけばよい。このようにおくと (2) と同じ式になるので，後は (2) と同様にできる。

- 2 変数関数の極限値はどのような近づき方をしても一定の値に近づくとき収束すると定義された。

- 収束しないのは，前項の否定なので

  (1) ある近づき方で収束しない，または

  (2) 2 通りの近づき方をしたとき，ともに収束するが極限値が異なる

  ときである。

- (5) を考える。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおく。

  $$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} &= \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta} \\ &= \frac{1}{\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}\end{aligned}$$

$\theta = 0$ として $r \to +0$ とすると極限値は 1 であり，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ として $r \to +0$ とすると極限値は $\dfrac{2}{3}$ である。よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$ は存在しない。

- (4) を考える。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおく。

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} = \frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta}$$
$$= \frac{r\cos^3\theta + r\sin^3\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}$$

分子は (2) と同様に

$$|r\cos^3\theta + r\sin^3\theta| \leqq 2r$$

となる。分母は

$$\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta = 1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

とできるので $-1 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$ より

$$\frac{1}{2} \leqq \cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta \leqq \frac{3}{2}$$

これより

$$0 < \frac{1}{\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta} \leqq 2$$

が成立する。よって

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\right| \leqq 4r$$

となるので極限値は 0 である。