解析学 I に対する追加説明#7

- 演習問題 2.5,2.8 でとりあげた次の関数を例に連続，偏微分可能，全微分可能に関して復習する。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

- 関数 $z=f(x,y)$ が (a,b) で連続の定義は

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$$

が成立することである。即ち

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ が存在すること，および

(2) それが関数の値 $f(a,b)$ に一致すること

が必要である。

- よって関数 $f(x,y)$ が (a,b) で連続でないことを示すためには

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ が存在しないこと，または

(2) 極限が存在しても関数の値 $f(a,b)$ に一致しないこと

を示せばよい。

- 演習問題の関数に関して

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

が存在しないことは例 2.5 (2) ですでに示してある。よって関数 $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない。

- 次に原点で偏微分可能であることを示す。

$$\begin{aligned}f_x(0,0)&=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{h0}{h^2+0^2}-0\right)\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot0=\lim_{h\to0}0=0\\f_y(0,0)&=\lim_{k\to0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{1}{k}\left(\frac{0k}{0^2+k^2}-0\right)\\&=\lim_{k\to0}\frac{1}{k}\cdot0=\lim_{k\to0}0=0\end{aligned}$$

原点 $(0,0)$ において x に関する偏導関数も y に関する偏導関数も存在するので，$(0,0)$ で偏微分可能である。

- 最後に原点 $(0,0)$ で全微分可能でないことを示す。$(0,0)$ で全微分可能であるとすると，演習問題 2.6 より接平面の方程式は

$$\begin{aligned} z &= f(0,0) + f_x(0,0)h + f_y(0,0)k \\ &= 0 + 0h + 0k = 0 \end{aligned}$$

となる。変数は x, y でなく h, k で表している。ただし今の場合 $x = 0 + h, y = 0 + k$ なので $x = h, y = k$ である。

$$\begin{aligned} \varepsilon(h,k) &= \frac{f(0+h, 0+k) - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \left(\frac{hk}{h^2+k^2} - 0 \right) \\ &= \frac{hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \end{aligned}$$

となる。

$h = r\cos\theta, k = r\sin\theta$ と極座標表示すると

$$\begin{aligned} \varepsilon(h,k) &= \frac{r\cos\theta r\sin\theta}{\left(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right)\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}} \\ &= \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^3} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{r} \end{aligned}$$

となる。$\varepsilon(h,k)$ は $r \to +0$ のとき収束しないので全微分可能でない。