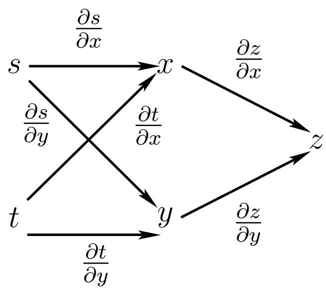
解析学 I に対する追加説明#8

- 偏導関数を求めることに関して解説しておく。
- $z = \sin x \cos y, x = s^2 - t^2, y = 2st$ を例に考える。

  変数間の関係は下図の様になっている。



  これより

  $$z_s = z_x x_s + z_y y_s$$

  が成立していることが分かる。よって z_x, z_y, x_s, y_s を求めればよい。

- 偏微分ではどの変数とどの変数がペアになっているかをきちんとおさえておくことが大切である。

  $z = z(x, y)$ は x と y がペアなので，x で (偏) 微分するということは，y を定数と見て x で微分することを意味する。

  $$z_x = \cos x \cos y, \qquad z_y = -\sin x \cos y$$
  $$x_s = 2s, \qquad y_s = 2t$$

  一部に $x_s = 2s - t^2$ としていた人がいた。x で偏微分するときは y を定数と見ていることを忘れないように。

  $$z_s = 2s \cos x \cos y - 2t \sin x \sin y$$

- z_{ss} を求める。

  $$\begin{aligned} z_{ss} &= (z_s)_s = (2s \cos x \cos y - 2t \sin x \sin y)_s \\ &= (2s \cos x \cos y)_s - (2t \sin x \sin y)_s \\ &= (2s)_s \cos x \cos y + 2s (\cos x \cos y)_s - 2t (\sin x \sin y)_s \end{aligned}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
(\cos x \cos y)_s &= (\cos x \cos y)_x \, x_s + (\cos x \cos y)_y \, y_s \\
&= -2s \sin x \cos y - 2t \cos x \sin y \\
(\sin x \sin y)_s &= (\sin x \sin y)_x \, x_s + (\sin x \sin y)_y \, y_s \\
&= 2s \cos x \sin y + 2t \sin x \cos y
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
z_{ss} &= 2\cos x \cos y - 4s^2 \sin x \cos y - 4st \cos x \sin y - 4st \cos x \sin y - 4t^2 \sin x \cos y \\
&= 2\cos x \cos y - 4(s^2 + t^2) \sin x \cos y - 8st \cos x \sin y
\end{aligned}
$$