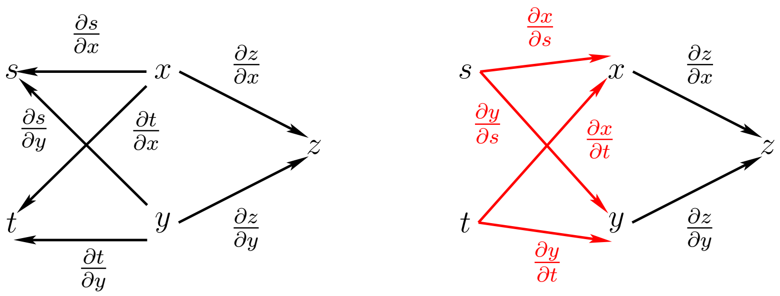
# 解析学 I に対する追加説明#9

- ヤコビ行列を用いて計算する方法について解説しておく。
- $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = x^2y^2$ を例に考える。

  変数間の関係は下図左であって，下図右ではない。

  変数間に下図右のような関係が成立するかが問題であるが，実はほとんどの場合成立する。




- 最初に 1 変数の場合を考える。$y = f(x)$ に対し定義域全体では逆関数は存在しないが，点の周りなら「ほとんど」のところで存在する。きちんと書けば次のようになる。


- $a$ を定義域の内点とし $f'(a) \neq 0$ とする。このとき $a$ を含む開区間 $U$ と $f(a)$ を含む開区間 $W$ が存在して，$f$ を $U$ に制限した関数は

$$f : U \longrightarrow W$$

  全単射である。よって $W$ から $U$ への逆関数が存在する。

  これを**逆関数定理**という。

- 2 変数関数の場合は 2 変数関数 2 個の組に対し同様の定理が成立する。これを**逆関数定理**という。

  $x = x(s,t), y = y(s,t)$ を 2 変数関数とする。$\vec{s} = (s,t), \vec{x} = (x,y)$ とし，2 変数関数 2 個を組として写像 $f$ を

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\vec{s} \longmapsto \vec{x}$$

とする。$(a,b)$ が定義域の内点で $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}(a,b) \neq 0$ とする。$(a,b)$ を含む開領域 $U$ と $f(\vec{s}) = (x(s,t), y(s,t))$ を含む開領域 $W$ が存在して $f$ を $U$ に制限した関数は

$$f : U \longrightarrow W$$

全単射である。よって $W$ から $U$ への逆関数が存在する。

- 1 変数関数の場合定数関数など特別の場合を除き「ほとんど」の点で $f'(x) \neq 0$ となる。2 変数関数の場合も「ほとんど」の関数の「ほとんど」の点で $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \neq 0$ となる。これは $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = 0$ の解が $s,t$–平面内の曲線になることから分かる。

- $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \neq 0$ という条件が $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列が存在する条件になっていることを注意しておく。

- 問題に戻る。$x_s, y_s$ を計算するため，$\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めその逆行列を計算する。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} &= \frac{D(x,y)}{D(s,t)} \\ &= \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{4xy(x^2-y^2)}\begin{pmatrix} 2x^2y & -2y \\ -2xy^2 & 2x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2xy(x^2-y^2)}\begin{pmatrix} x^2y & -y \\ -xy^2 & x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- よって

$$x_s = \frac{x^2y}{2xy(x^2-y^2)} = \frac{x}{2(x^2-y^2)}, \quad y_s = \frac{-xy^2}{2xy(x^2-y^2)} = \frac{-y}{2(x^2-y^2)}$$

$$z_s = z_x x_s + z_y y_s = 1\frac{x}{2(x^2-y^2)} + 1\frac{-y}{2(x^2-y^2)} = \frac{1}{2(x+y)}$$

- $z_{ss} = \left(z_s\right)_s$ なので先ほどの図式で $z$ を $z_s$ に置き換えたものを考える。

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "x_s"] \arrow[ddr, "y_s"'] & x \arrow[dr, "(z_s)_x"] & \\
 & & z_s \\
t \arrow[uur, "x_t"'] \arrow[r, "y_t"'] & y \arrow[ur, "(z_s)_y"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$z_{ss} = \left(z_s\right)_x x_s + \left(z_s\right)_y y_s$$

である。$x_s, y_s$ はすでに求めてある。$z_s = \dfrac{1}{2(x+y)}$ なので

$$\left(z_s\right)_x = -\frac{1}{2(x+y)^2}$$
$$\left(z_s\right)_y = -\frac{1}{2(x+y)^2}$$

よって

$$\begin{aligned}
z_{ss} &= -\frac{1}{2(x+y)^2}\frac{x}{2(x^2-y^2)} - \frac{1}{2(x+y)^2}\frac{-y}{2(x^2-y^2)} \\
&= -\frac{x-y}{4(x+y)^2(x-y)(x+y)} = -\frac{1}{4(x+y)^3}
\end{aligned}$$