解析学 I に対する追加説明#10

- 極値を求める問題について解説する。
- 演習問題 2.34(6) を例にする。関数は

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

  である。

- 最初に臨界点を求める。そのためには

$$z_x = 4x^3 - 4x + 4y, \quad z_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

  なので高次連立方程式

$$z_x = 4x^3 - 4x + 4y = 0 \tag{1}$$
$$z_y = 4y^3 + 4x - 4y = 0 \tag{2}$$

  を解けばよい。高次連立方程式は数学序論で学んだが，連立一次方程式と違ってこれを解く一般論があるわけではない。また変形のとき必要十分であるかを注意する必要がある。即ち特定の解を求めるのではなく，すべての解を求めること。

- 一般論はないと言ったが，方程式単独，または組み合わせて，因数分解できる方程式を導くと，次数の低い方程式の組み合わせになるので，解法が容易になる。
- 式 (1) と式 (2) を加えて 4 で割ると

$$0 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

  を得る。よって $x + y = 0$ または $x^2 - xy + y^2 = 0$ が成立する。

  最初に $x^2 - xy + y^2 = 0$ が成立している場合を考える。

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0$$

  より $x = 0, y = 0$ を得る。これは $z_x(0,0) = 0, z_y(0,0) = 0$ を満たしている。

次に $x+y=0$ の場合を考える。$y=-x$ を式 (1) 代入すると

$$\begin{aligned}0 = z_x(x,-x) &= 4x^3-4x-4x = 4(x^3-2x)\\ &= 4x(x^2-2) = 4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=\sqrt{2}$ または $x=-\sqrt{2}$ となる。今の場合

$$(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

となる。以上により臨界点は

$$(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

である。

- 次にヘッシャンを用いて極値判定を行う。

  $$z_{xx}=12x^2-4,\quad z_{xy}=4,\quad z_{yy}=12y^2-4$$

  なので

  $$H(x,y)=16(3x^2-1)(3y^2-1)-16$$

  となる。よって

  $$H(0,0)=0,\quad H(\sqrt{2},-\sqrt{2})=H(-\sqrt{2},\sqrt{2})=384>0$$

  となる。$z_{xx}(\sqrt{2},-\sqrt{2})=z_{xx}(-\sqrt{2},\sqrt{2})>0$ なので $(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ で極小である。

  $(x,y)=(0,0)$ はヘッシャンでは判定できない。

- ヘッシャンで分からない場合は個別の関数の様子を調べる必要がある。要綱の例では，x 軸上と y 軸上の様子を調べることで $(0,0)$ が極点ではないことが分かった。この例で考えると，

  $$z(x,0)=x^4-x^2,\quad z(0,y)=y^4-2y^2$$

  となり共に一変数関数としては極大である。即ち $(0,0)$ の十分近くで $z(0,0)>z(x,y)$ となる点 (x,y) が存在する。

  この段階で「$(0,0)$ は極点である」と判断してはいけない。他の方向では極小になっているかもしれない。

- 関数が

  $$z=x^4+y^4-2(x-y)^2$$

  となっていることに注意すると，$x-y=0$ 上で考察するとよいことに気がつくかもしれない。

- $x-y=0$ 上での z の動きを見よう。$g(x)=z(x,x)$ とおくと
$$g(x)=2x^4$$
となるので $x=0$ で極小である。よって $(0,0)$ の十分近くの点 (x,y) で (今の場合 $y=x$ を満たしている)，$z(x,y)>z(0,0)$ となる点がある。

- $(0,0)$ の十分近くの点 (x,y) で $z(x,y)<z(0,0)$ となる点および $z(x,y)>z(0,0)$ となる点があるので，$(0,0)$ で極点ではない。

- 以上により $(x,y)=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ および $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ が極点でありそこで極小値をとる。