解析学 I に対する追加説明#11

- 陰関数について解説する。
- 演習問題 2.38(1) を例にする。陰関数を定義する式は

$$F(x,y) = 1 - y + xe^y = 0 \tag{1}$$

である。

- $F(x,y)=0$ 上の点 (a,b) が与えられるとそれに対応して陰関数 $y=f(x)$ が定まっている，と考える。
- 「**陰関数が定まっている**」と考える点がポイントである。2 変数関数 $F(x,y)$ を 2 変数関数と考えているときは，x と y は独立であるが，陰関数を考えているとき y は x を独立変数とする従属変数である。
- y は従属変数であることに注意して式 (1) を x で微分すると

$$-y' + e^y + xe^y y' = 0 \tag{2}$$

が得られる。

- 式 (2) を変形すると

$$y' = \frac{e^y}{1 - xe^y} \tag{3}$$

を得る。

- 2 次導関数をえるには式 (3) を微分してもよいが，商の形になっているので，式 (2) を微分すればよい。

式 (2) を x で微分すると

$$-y'' + e^y y' + e^y y' + xe^y \left(y'\right)^2 + xe^y y'' = 0$$

となる。これを整理すると

$$y'' = \frac{(2-x)e^{2y}}{(1-xe^y)^3}$$

となる。

- 陰関数の導関数を見ると点 (a,b) は表に顔を見せていない様に思われるが，そうではない。例えば，陰関数 $y=f(x)$ の導関数を計算しようとすると，a だけではなく b が必要になる。
- 例えば $(0,1)$ に対して

  $$F(0,1) = 1 - 1 + 0e^1 = 0$$

  なので $(0,1)$ の近傍で定まる陰関数 $y = f(x)$ の $x = 0$ での導関数の値は

  $$f'(0) = \frac{e^1}{1 - 0e^1} = e$$

  となる。